SECTIONUM CONICARUM SYNOPSIS

CUJUS AUCTOR

D. GUIDO GRANDUS

CREMONEN:

Abbas Camaldulensis, suique Ordinis, Apostolico Privilegio Ex-Generalis, in Pisana Universitate Mathematicæ Professor, ac Magni Ducis Ethruriæ Theologus, & Mathematicus, è Regia Societate, &c.

NEAPOLI MDCCXXXVII.
EXPENSIS BERNARDINI GESSARI.
Typis Felicis-Caroli Mosca.

Superiorum licentia.

PRÆFATIO.

SEctionum Conicarum Doctrina, tum scitu valdè jucunda, tum maximæ utilitatis censenda est, cùm earum cognitio, non tantùm meris Geometris, sed & Philosophis, Astronomis, Opticis, Horographis, & Architectis necessaria sit, & physicis speculationibus, ac plurimis mechanicis usibus admodùm opportuna. Sanè terrestrium corporum transversim projectorum motus per curvas Parabolicas distenditur, ob proximas gravitatis directiones, prò parallelis sensibiliter habitas, utpotè ad centrum maximè distans respicientes; consideratis autem iisdem directionibus, in rigore non æquidistantibus, sed reverà invicem inclinatis, utpotè ad terræ centrum convenientibus, curvarum Ellipticarum arcus à Projectis describitur, cujus remotior Focus ad ipsum globi terrestris centrum pertinet, Focus autem proximior idem est, qui ad Parabolam pertineret, si dictæ gravium directiones pro parallelis essent acceptæ. Ita etiam

Orbitæ Planetarum circa Solem, & cujusvis Sattellitis circa primarium ejus Planetam, Ellipticæ describuntur, juxtà Kepleri, & Neutoni hypothesim: Porro, in Reflexionibus, & Refractionibus quoque aptè disponendis, harum Sectionum Conicarum cognitio requiritur, quippe ex earum Focis pendet reflexio radiorum, qui aut in unum punctum concurrant, ubi ignem accendant, sive in illud duxtaxat colliment, ut objecti proximiorem imaginem reddant, vel paralleli remittantur, ut eandem fermè intensionem ad maximam distantiam servent: quin & eorundem radiorum refractio lentes exigit, aut meniscos, Ellipticis, aut Hyperbolicis, seu Parabolicis, & Circularibus figuris superficiem rotatam habentes, ut ex earum Focis refractorum radiorum conjunctio, vel in proximius punctum collimatio, quæsitos reddat effectus. In horologiis etiam solaribus umbra styli gnomonici, in plano, cui insistit, Hyperbolas plerumque describit, in aliquo etiam situ Parabolas, in alio Ellipses, ad quas lineæ horariæ suos terminos habent. Quin & ab Architectis arcus Elliptici sæpe in ædificiis sunt describendi, & Fornices, terminis non horizontaliter positis insistentes, in Parabolicæ, aut Hyperbolicæ figuræ

spe-

speciem disponendos tradidit Cl. F. Blondellus in sua Architectura ; Veliformis autem Florentina Testudo, ex hemisphærio per quatuor fenestras abscissu quadrabilis, Ichnographiam Parabolicam *habet, ac perimetrum suarum cavitatum* Ellipticæ *curvæ æqualem, ut in Geometrica demonstratione Problematum Cl. Vincentii Viviani, qui hujusce formæ Testudinem proposuerat, ipse domonstravi* pag. 37. & 136. *dicti Operis ; imò & Militaribus Architectis, cavitatem Cuniculorum, pyrio pulvere, in obsidionibus, complendam*, Parabolica *curvatura disponi debere tradit Cl.Bernardus Belidorus in suo novo cursu Mathematico* num. 609.

Cum verò adeò utilis ejusmodi Sectionum Conicarum scientia, nimis longa methodo, in Magni Geometræ Apollonii Pergæi libris exposita videatur, ubi quandoque binas, aliquando ternas foliorum facies implet unius Theorematis, aut Problematis demonstratio ; ideò magis congruum reputavi, præcipuas harum curvarum proprietates, cum quibusdam aliis recentiùs inventis, hac breviori Synopsi, compendiosiùs tradere, ut tempore non admodum prolixo studiosi Adolescentes illas discere faciliori methodo possint ; id quod etiam Eruditi Lypsienses comprobarunt

runt, *dum similis illius mei compendii Sectionum Conicarum*, *italico idiomate dudùm expositi*, *& anno* 1722. *Florentiæ impressi*, *Relationem exhibentes in supplementis suorum Actuum*. Tomo VIII. *anno* 1724. *edito* pag. 434., *ita sententiam suam exprimunt*. In tanto numero scriptorum, qui tradunt proprietates Sectionum Coni, etiamuum desiderabatur liber aliquis, mole parvus, materia plenus, in demonstrationibus brevis, & quod palmarium est, ad Veterum methodum conscriptus. Rem igitur fecit gratissimam, & utilissimam Geometriæ Studiosis celeberrimus Grandus, qui tam eleganter, tam copiosè, & tanta nihilominus brevitate persecutus est hanc partem Geometriæ, quam in Scholis plerique vix hactenus attigerunt, spissitudine voluminum, vel analyticis characteribus deterriti, & idcircò ultra Elementa Euclidis rarò progressi.

Et quoniam ibidem pag. 435. *monent iidem Eruditi Lypsienses*, Cl. Christianum Aug. Hausen, *in ipsa Lypsiensi Accademia*, Matheseos Professorem, utilitate operis permotum, inter perlegendum, versionem hujus Opusculi latinam adornasse, in gratiam Auditorum, brevi cùm lectionibus ejus Geometricis proditurarm,

& ab

& ab originali suo non differentem &c. *de quo etiam testantur*, *quod alicubi* demonstrationes interdum breviores, & concinniores, suppletis quibusdam, & evidentiùs expositis illationum nexibus, faciliores effecerit, & Figuras, in quibus Chalcographus ab hypothesi aberraverat, accuratiùs construxerit. *Cùm tamen ejusmodi editionis nulla adhuc notitia pervenerit, ideò congruum fore duxi, ut hæc mea Latina Synopsis Conicarum Sectionum, additis quibusdam aliis Theorematibus aucta, & quibusdam superflais ommissis, & prioris Italicæ impressionis erroribus, tam in textu, quàm in Figurarum descriptione correctis, in publicum prodiret, cujus usus, non in Italia dumtaxat, sed in quavis alia Europæ provincia, plurimum utilis esse poterit, juxtà eorundem Lypsientium Litteratorum attestationem; non enim plurimi, sed paucissimi tantùm, ex Transalpinis Europæ Studiosis hoc opusculum, hetrusca lingua expressum, intelligere potuissent; unde & Egregius Hispanicæ Militiæ Architectus D. Joannes de Aguillar, meum illud Italicum Sectionum Conicarum Compendium in hispaniense idioma traducere maluit, ut suæ nationis Discipulis, Mathematum studio incumbentibus, intelligibile*

bile fieret: qua tamen versione opportunior erit hæc Latina Expositio, quàm ideò hic imprimendam permittere malui; utpote quæ plerisque Europæ Geometris magis percipi possit, quàm Italica, vel Hispanica, seu cujusvis alterius regionis idiomate peculiari rescripta.

SE-

SECTIONUM CONICARUM SYNOPSIS.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I. PEr fixum punctum A, extra planum circuli BED acceptum, transiens recta linea BAF, utrinque indefinitè producta, si per ejusdem circuli peripheriam circumducatur, illam perpetuò radens, usque dum in eundem situm redeat, à quo moveri cœpit: Utraque superficies, ex hoc lineæ motu, hinc inde à fixo puncto A resultans, *Conica* nuncupatur. Fig. 1. & 2.

II. Et solida ex his superficiebus, ad circulum BED, vel huic oppositum *b e d*, terminatis, comprehensa, *Coni* appellantur.

III. Tam superficiei Conicæ, quam ipsius Coni *Vertex* dicitur fixum illud punctum A.

IV. Ejusdem autem Coni *Basis* est ipse circulus BED, ad quem terminatur.

V. Linea, quæ verticem Coni A cum centro C suæ basis circularis conjungit, *Axis* est Coni.

VI. Qui axis, si perpendicularis fuerit ad planum basis, Conus ille *Rectus* vocabitur. Fig. 1.

VII. Si verò fuerit axis ad planum basis obliquè inclinatus, Conus ille *Scalenus* dicetur. Fig. 2.

CONSECTARIA.

1. Patet hinc, utramque illam Conicam superficiem, BAD, d AF, ad communem verticem A contrapositas, in infinitum extendi posse, producta utcumque linea illa genitrice harum superficierum.

2. Sumto quolibet puncto H in conica superficie, recta linea illud conjungens cum vertice A, in eadem conica superficie jacebit: congruet enim cum recta EA, quæ superficiem illam, sua circumvolutione describens, per quodvis ejus punctum transit, adeoque in idem punctum H impingit.

3. Unde & qualibet recta AH, jungens verticem coni A cum aliquo puncto H ejus superficiei Conicæ, producta in peripheriam basis, ad aliquod ejus punctum E pertinget.

4. At si duo puncta H, I in eadem Conica superficie accepta fuerint, recta HI, si per verticem A non transierit, intra conum cadet: nam junctis ad verticem A rectis AH, AI, & ad basis peripheriam productis, cui incident ad puncta E, B, utique juncta EB intra circulum cadet (*prop.2. lib.III. Elem.*) ergo planum Trianguli ABE intra Conum immergitur, quia secat ejus basim; itaque recta HI in hoc plano existens, cum jungat duo puncta laterum talis trianguli, intra Conum & ipsa manebit sua illa portione dictis punctis interjecta; quamquam si ultra hinc inde producatur, utique extra Conicam superficiem se extendet.

5. Si Conus quolibet plano per verticem A transeunte secetur, sectio Triangulum erit: nam utraque ipsarum linearum AB, AE, aut AB, AD, quæ sunt communes sectiones superficiei Conicæ, & planorum ABE, vel ABD ipsam secantium, semper congruit cum ipsa recta mobili AB, transeunte per eadem puncta B, E, D, dum conicam generat

rat superficiem ; Et communis sectio plani secantis cum plano basis, est pariter recta EB, vel BD, ergo ABE, aut ABD sunt triangula rectilinea.

SCHOLION.

I. Si de his quoque triangularibus Coni sectionibus, non de Curvis dumtaxat, agendum hic esset ; considerandа forent Triangula, sive plano per axem transeunte genita, ut ABD, AFE ; quæ semper invicem æqualia erunt in Cono recto, ob æquales eorum bases, nempe diametros BD, FE circularis basis, & æqualem altitudinem axis AC, perpendicularis plano, adeoque & omnibus rectis per C transeuntibus : sive extra axem trajecto plano ad chordas BE, aut BL protensa ex vertice A triangula ABE, ABL ; quæ in eodem Cono recto Isoscelia semper erunt, ob latera omnia AB, AE, AL semper æqualia, quippe eorum quadrata æquantur quadrato axis AC, & quadrato radii circularis CB, aut CE, vel CL ; sed inæqualis magnitudinis, ob inæquales bases BE, BL, quæ cum æqualibus lateribus juncta, angulos sibi ad verticem trianguli oppositos BAE, BAL inæquales efficiunt (25.1.Elem.), *quorum sinus recti EN, LO pariter inæquales erunt ; & ad communem basim AB relata triangula ABE, ABL, erunt ut eorum altitudines inæquales EN, LO.* Fig. 3.

II. Itaque si angulus verticalis BAD trianguli per axem transeuntis rectus fuerit, aut acutus ; reliquorum triangulorum extra axem trajectorum anguli BAE, BAL subinde minores fient, prout minori chordæ BE, BL insistent : Ideoque omnium triangulorum maximum erit per axem transiens, & reliqua subinde minora, prout magis ab axe recedent, minorem chordam pro basi habentia. Si verò angulus verticalis per axem traducti trianguli obtusus *fuerit; non erit hoc triangulum omnium maximum, sed aliud ipso majus extra axem poterit determinari. Quadratum enim diametri BD, oppositi angulo obtuso BAD, majus erit quadratis laterum AB, AD* (12.II.Elem.); *ergo aliqua chorda BL minor diametro inveniri poterit, cujus quadratum æquale sit duobus quadratis laterum AB, & AL, ubi angulus BAL rectus evadet* (48.I.Elem.); *ideoque triangulum BAL extra axem majus erit altero per axem transeunte: accepto enim latere AB pro basi, erit trianguli BAL altitudo LA, quæ æquatur AD, & major est perpendiculari DM, quæ esset altitudo alterius trianguli BAD per axem, nempe sinus recti anguli DAM, consequentis ad obtusum BAD: Et hac ratione triangulum BAL, cujus angulus rectus sit ad verticem Coni, majus erit quolibet alio triangulo, sive per axem, sive extra ipsum transeunte, ob maximam omnium altitudinem. Quod si fiat extra axem triangulum BAE, cujus angulus in A fuerit acutus, æqualis DAM, consequenti ad illum obtusum trianguli per axem BAD; erit ipsum triangulum BAE æquale BAD; quia perpendicularis EN æquabitur alteri DM, cùm sit sinus anguli æqualis, tam hæc, quàm illa.*

Fig. 4. & 5. III. *At si Conus fuerit Scalenus, demissa ex vertice A in planum basis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD, rectum plano basis BED; patet, fore omnium Coni laterum maximum AB, remotissimum a perpendiculo AQ, & omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum: aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, majus esse, quod est maximo propinquius, minus verò quod ab ipso remotius. Nam linearum ex puncto Q ad peripheriam circularem deductarum maxima est QB per centrum trajecta, minima verò ejus portio QD: ipsæ autem*

QF,

QF, QE majores, ac minores sunt, prout maximæ, aut minimæ propiores (7.& 8.III.Elem.) : *quare & ipsarum quadrata maxima, & minima, ac majora, aut minora respectivè erunt: quemadmodum etiam duo qualibet quadrata linearum QO, QE, a maxima QB, hinc inde æque remotarum, adeoque invicem æqualium, æqualia erunt. Unde singulis addito quadrato perpendicularis AQ, resultabit quadratum AB omnium maximum, & AD omnium minimum; & AF, AE quadrata majora, aut minora, prout illi maximo propriora fuerint, aut remotiora: itemque AO, AE quadrata, attingentia terminos rectæ EHO ad diametrum DB ordinatæ, erunt æqualia. Patet igitur, majus omnibus Coni lateribus esse AB, & minimum AD; ac reliqua majora, aut minora resultare, prout magis accesserint, aut recesserint a maximo; aut æqualia esse si æquè distent ab ipso, ut AO, AE. Quibus, aliisque similiter ad terminos alterius ordinatæ ductis, efficitur æquicrure triangulum AOE; cætera verò Scalena semper resultabunt, nisi forte contingat alicui habere basim uni ex lateribus æqualem.*

IV. Si quis angulus verticalis trianguli per axem in Cono Scaleno rectus fuerit; omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem æquales. Nam semicirculus super diametro DB, in plano trianguli per axem descriptus, per verticem A transiret, ob angulum rectum ibi a lateribus comprehensum, adeoque axis AC semper esset æqualis radio basis CB: unde in quolibet alio triangulo EAF per axem transeunte, semicirculus super diametro EF, in ejus trianguli plano descriptus, per A transiret, propter AC æqualem radiis CF, CE; ideoque rectum angulum latera quoque EA, FA continerent (31.III.Elem.). *Verùm si angulus BAD acutus sit, vel obtusus, reliqua per axem triangula inæquales angulos ad verticem A habebunt, nisi eorum bases* *hinc inde æqualiter ad diametrum* BD *fuerint inclinata.*

V. Summæ nihilominus quadratorum, ex lateribus cujusvis trianguli per axem, erunt semper æquales. Nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum æquantur duplo quadrati rectæ a vertice ad dimidium basis ductæ, una cum duplo quadrati ipsius semibasis, ut in nostris Geometricis Institutionibus demonstravimus. Itaque duo quadrata AB, AD æquatur duplo quadrato axis AC, cum duplo quadrato radii CB: item duo quadrata AE, AF æquabuntur duplo quadrato ejusdem axis AC, & duplo quadrato radii CE, ipsi CB æqualis; ergo duo quadrata AB, AD æquantur duobus quadratis AE, AF.

VI. Horum autem triangulorum per axem, minimum erit BAD rectum plano basis, transiens per AQ perpendiculum; & maximum erit EAF, cujus basis EF sit alteri diametro BD perpendicularis: aliorum autem PAL magnitudo erit intermedia, itaut majora evadant, quæ maximo propiora fiant. Si enim super recta CQ, inter axem, & perpendiculum, velut super diametro, circulus CSQ, in plano basis Coni, describatur; hic erit locus omnium perpendicularium, ex vertice A ad bases quorumlibet triangulorum per axem transeuntium, demissarum. Nam ECF perpendicularis diametro DB, tanget circulum QSC in C; & triangulum EAF æqualia latera habebit AE, AF (ut num.3. *ostensum est); ideoque AC bifariam secans basim trianguli æquicruris, erit ipsi perpendicularis: ubi verò alia diameter PL secat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipsi PL pariter perpendicularis: quia juncta QS, erit quadratum QC æquale quadratis CS, QS* (3.III.& 47.Elem.): *quare AC quadratum, quod æquatur quadratis AQ, & QC* (47.I.Elem.), *erit æquale quadratis AQ, QS, SC: at quadratis*

Fig.6. & 7.

AQ,

AQ, & QS est aequale quadratum AS; ergo quadratum AC aequatur quadratis AS, & SC; ideoque angulus ASC rectus erit (48. I. Elem.). *Quia ergo rectarum ex A ad peripheriam circuli QSC ductarum (ut de lateribus Coni dictum est) maxima erit AC; minima AQ, & intermedia AS mediocris magnitudinis, pro majori accessu ad maximam AC crescentis; ideò maximum erit triangulum EAF; cujus altitudo AC, minimum BAD; cujus altitudo AQ, intermedia verò magnitudinis PAL, cujus altitudo AS.*

VII. Triangula verò extra axem; licet in Cono recto, cujus axis aequalis, aut major sit radio basis; nempe in quo verticalis angulus trianguli per axem BAD rectus sit, vel acutus; minora semper ostensa sint quovis triangulo per axem transeunte: in Cono tamen Scaleno, sive obtusus sit, sive rectus, aut acutus ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL; triangula tamen extra axem haberi possunt, tum quolibet illorum minora, tum quaedam etiam maximo FAE majora, aut aequalia. Ipsi enim EF parallela GO duci potest, ordinata ad diametrum DB in H, & supra ipsam ducto per verticem A plano; si efficiatur triangulum GAO, quod aequicrure erit, eiusque perpendicularis evadet recta AH; fieri potest, ut vel aequalis, vel major sit ratio ipsius AH ad axem AC; comparata rationi EF ad GO, seu CE ad GH; ideoque potest esse triangulum GAO aequale, vel majus ipso AEF, quod erat maximum omnium per axem AC transeuntium. Fig. 8.

Verùm haec de Triangularibus Coni sectionibus indicasse sufficiat: Jam de Curvis sectionibus Conicis est deinceps agendum.

PROPOSITIO I.

9. *Si Conus ABD, aut illi ad verticem oppositus, secetur plano basi BED parallelo, sectio FHG, aut* f g h *Circulus erit.*

DUcatur axis AC, occurrens plano secanti in puncto L, & per axem idem conus secetur plano triangulari ABD, cujus & prioris plani secantis communis sectio FG parallela erit diametro basis BD (*16.XI.Elem.*); ac sumto quolibet puncto H in perimetro sectionis, juncta ad verticem AH, protrahatur ad peripheriam basis in E, ac jungantur EC, HL: nam sunt communes sectiones plani trianguli ACE cum illis parallelis planis BED, FHG, ideò similia erunt triangula ACE, ALH: itemque similia CBA, LFA; propterea erit CE ad LH, ut CA ad LA; & ut CA ad LA, ita BC ad FL; quare CE ad LH est, ut BC ad FL: sed radius CE æquatur radio BC, ergo & LH æquatur ipsi FL. Et eodem modo ostendetur, quamlibet aliam rectam jungentem quodvis punctum perimetri hujus sectionis cum puncto L, æquari eidem FL; ergo hæc sectio circulus erit, cujus centrum L, quippe omnes rectæ hinc ad perimetrum sectionis ductæ, ostenduntur æquales. Quod erat, &c.

COROLL. Hinc axis Coni AC transit per centra quælibet L, omnium circulorum, quibus æquidistanter basi Conus secatur; idque etiam in alio opposito Cono A *g f* contingit.

PROPOSITIO II.

Fig. 10. *Si Conus Scalenus ABED secetur plano per axem transeunte, ad basim recto ABD; mox altero plano KHM ad illud planum ABD recto iterum secetur per rectam KM, quæ triangulum KAM efficiat*

tiat simile ipsi ABD, sed subcontrariè positum, ut nempe sit angulus AKM æqualis ADB, unde & alius AMK erit alteri ABD æqualis, ob angulum A utrique triangulo communem: hæc quoque sectio circulus erit.

Ducta ex quolibet puncto H perimetri hujus sectionis recta HI, quæ sit perpendicularis plano ABD, atque in communem planorum sectionem KM incidet (39.*XI.Elem.*), agatur per I recta FIG parallela diametro basis BD; ac per ipsas FG, HI ducatur planum FHG, quod erit parallelum plano basis transeunti per BD, & per ER huic perpendicularem, quæ erunt ipsis FG, HI parallelæ (15.*XI.Elem.*): Quare sectio FHG erit circulus (*Prop.præced.*), cujus centrum L in axe, ubi secat ejus diametrum FG: & bifariam pariter secta KM in O, jungantur HL, HO; erit quadratum HL æquale quadrato alterius radii GL, ideſt rectangulo FIG cum quadrato LI (5.*II.Elem.*): sed idem quadratum HL æquatur quadratis HI, & LI; ergo quadratum HI æquatur rectangulo FIG. Sed ob angulum AKM æquale ADB, adeoque etiam angulo externo parallelarum MGI, & angulos ad verticem I æquales KIF, GIM, similia sunt triangula FIK, GIM; unde KI ad IF est, ut GI ad IM (4.*VI.Elem.*); adeoque rectangulum FIG æquatur rectangulo KIM (16. *VI. Elem.*); ergo quadratum HI æquatur etiam rectangulo KIM: & addito quadrato IO, erunt quadrata HI, & IO, æqualia rectangulo KIM cum quadrato IO; ideſt quadratum OH æquabitur quadrato OM; est igitur recta OH æqualis OM; & de qualibet recta ex alio puncto perimetri KHM ad idem punctum O ducta idem demonſtrabitur; ergo hæc quoque sectio est circulus, cujus centrum O. Quod erat, &c.

COROLL. I. Hinc habetur, quod in circulo qua-

quadratum perpendicularis ductæ ad diametrum ex quolibet puncto circumferentiæ, æquatur rectangulo ex partibus diametri ab ipsa divisis, nempe HI quadratum æquatur rectangulo FIG in circulo GHF: Et vicissim si in aliqua figura KHM, quadratum cujusvis perpendicularis ex perimetro ad basim ductæ HI æquatur rectangulo partium basis KIM; hæc figura erit circulus, cujus diameter ipsa basis KM.

COROLL. II. Si planum secans, neque sit parallelum basi; neque subcontrariè positum triangulum abscindat simile triangulo per axem ad basim recto; sectio non erit circulus; quia ob inæqualitatem angulorum; triangula FKI, MGI non erunt similia; nec erit KI ad IF, ut GI ad IM; unde rectangulum FIG, seu quadratum HI, non æquabitur rectangulo KIM; & addito quadrato IO, non evadet quadratum OH æquale OM, adeoque radii non erunt æquales.

COROLL. III. Quoniam in ejusmodi subcontraria sectione triangula per axem AKM, BAD sunt similia, ideoque DA ad AB est, ut AK ad AM; rectangula DAM, BAK sunt æqualia; & circulus per puncta B, K, M, D transire posset. Ducta verò BN eidem KM parallela; circulus triangulo DNB circumscriptus, tangeretur a latere AB in B; quia triangulorum ADB, ABN similitudo dat AD ad AB, ut AB ad AN; ideoque AB quadratum rectangulo DAN æquale redditur, unde AB fit tangens circuli per B, N, D transeuntis (37.*III.Elem.*)

COROLL. IV. Et quia omnes sectiones ipsi circulo KHM parallelis planis effectæ pariter circuli erunt; juncta ex Coni vertice A ad centrum O recta AO, per centra omnium circulorum ipsi æquidistantium transibit; quippe omnes rectas KM parallelas bifariam secabit, ut ipsa secatur in O, & BN in S: unde erit alius axis hujus Coni recta

cta AO, secans tamen inæqualiter diametrum basis in R. Ideo in Conis Scalenis erunt bini axes AC, AR, per circulorum suorum centra deducti: quando Coni recti unicum habent ejusmodi axem.

COROLL. V. Secabitur autem ab hoc axe secundario diameter basis in R, ut sit BR ad RD, quemadmodum lateris AB quadratum ad quadratum AD, seu quadratum rectæ AN ad quadratum lateris AB: axis verò primarius AC secabit diametrum circuli subcontrariè positi, velut BN in Q, ita ut sit BQ ad QN, ut quadratum AB ad AN quadratum, ideoque BR ad RD erit, ut NQ ad BQ. Nam ducta NPT parallela BD, erunt similia triangula BSR, NST, & ut BS æquatur SN, ita BR æquabitur NT; ergo BR ad RD est ut NT ad RD, scilicet, ut AN ad AD, quæ sunt ut quadratum AB ad quadratum AD, quia ostensæ sunt AN, AB, AD continuè proportionales (*ex Coroll. 3.*): & similiter BQ ad QN erit, ut BC ad NP (ob similia triangula BQC, PNQ), sive ut DC, quæ æquatur BC, ad NP, idest ut DA ad AN, nempe ut quadratum AB ad quadratum AN.

PROPOSITIO III.

Si Conus ABD triangulo per axem transeunte secetur, tum ex quovis puncto H superficiei conicæ agatur recta HIL parallela cuidam EF, quæ diametro basis Coni BD sit perpendicularis: dico rectam illam HIL occurrere plano ipsius trianguli per axem, & inde ad alteram superficiei Conicæ partem in L ita protendi, ut in dicto occursu I cum plano trianguli bifariam secta remaneat, nempe ut HI æquetur IL. Fig. 11.

Juncta enim ex vertice Coni A recta AH, producatur usque dum peripheriæ basis occurrat in M, &

M, & ex M in plano basis ducta MKG parallela ipsi EF, diametrum perpendiculariter secante, & ab ipso bifariam divisa in K, jungatur quoque recta AG, quæ jacens in superficie Conica conveniet cum ipsa HIL in L: etenim HL, MG æquidistantes tertiæ EF, sunt parallelæ inter se, adeoque in eodem plano trianguli AMG (9.*XI.Elem.*); & juncta AK erit communis sectio plani trianguli per axem BAD, & plani alterius trianguli AGM, unde per punctum I transibit, utrique plano commune. Quia ergo erit MK ad HI, ut KA ad AI, & ut GK ad IL; estque MK æqualis GK (2.*III.Elem.*) erit quoque HI æqualis IL(14.*V.Elem.*); ergo HL ab ipso plano per axem bifariam secatur. Quod erat, &c.

Fig. 12. COROLL. I. Hinc habetur, quod si Conus triangulo per axem sectus, alio plano per rectam MG diametro basis perpendicularem transeunte, iterum secetur, cujus & alterius plani communis sectio sit recta NK; hæc bifariam secabit omnes lineas, velut HL, in eadem sectione ductas ipsi MG parallelas.

COROLL. II. Et si eadem recta MG, perquam planum GNM deducitur, nedum sit perpendicularis diametro BD, sed etiam plano trianguli per axem (quod evenit, ubi triangulum per axem est rectum ad planum basis), tunc rectæ illæ MG, HL non solum bifariam, sed etiam ad rectos angulos secabuntur ab illa communi sectione KN: quippe non tantùm angulus MKD rectus erit, sed etiam MKN, & illi æqualis HIN. Ubi verò recta MKG non fuerit perpendicularis plano trianguli per axem, seu nisi triangulum per axem sit rectum plano basis, transeundo per rectam ex vertice Coni A ductam basi perpendicularem; tunc NK bifariam quidem secabit rectas illas parallelas HI, MG, sed ad angulos obliquos, non autem rectos, juxta inclinationem lineæ MK ad ipsam KN.

DE-

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I. Ipsa linea NK, bifariam secans omnes rectas HL eidem MG parallelas, in qualibet sectione GNM ductas, ejus sectionis *Diameter* vocabitur. Fig.13. 14. 15. 16.

II. Et diametri terminus N (vel etiam si terminus alius Q ipsi oppositus fuerit, etiam Q) *Vertex* sectionis dicetur.

III. Ipsæ autem sectæ HL, MG (vel etiam earum medietates HI, MK) *Ordinatæ* ad ipsam diametrum NK appellantur.

IV. Quod si nedum bifariam, sed etiam perpendiculariter secentur ordinatæ a Diametro, præter generale *Diametri* vocabulum, speciale nomen *Axis* eidem Diametro tribuetur.

Aliæ Definitiones in sequentibus aliquibus propositionibus, & earum Corollariis quibusdam designabuntur.

PROPOSITIO IV.

Si Conus ADMB plano per axem sectus, alio plano MNG secetur, per rectam MG diametro circuli basis perpendicularem, a qua bifariam secatur ipsa in K, & per rectam KN, uni ex lateribus AB trianguli per axem parallelam, deducto; erunt in ejusmodi sectione quadrata ordinatarum MK, HI, proportionalia abscissis a vertice sectionis N portionibus diametri NK, NI. Vocetur autem ejusmodi sectio Parabola. Fig.17.

PEr quodlibet punctum I communis sectionis KN, cui est ordinata HIL, ducta PIV parallela diametro basis BD, si agatur per ipsas VP, HL planum PHV, quod erit parallelum basi, per BD, MG illis æquidistantes transeunti, adeoque circulum efficiet, unde resultabit quadratum HI æquale rectan-

rectangulo PIV, ut quadratum MK æquatur rectangulo BKD (*Coll.1.prop.2.*); ergo quadratum MK ad quadratum HI est, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV, scilicet ut KD ad IV; nam BK æquatur PI, cum sit BPIK parallelogrammum lineis oppositis æquidistantibus comprehensum: Est autem KD ad IV, ut KN ad IN, ob similia triangula NKD, NIV; ergo quadrata ordinatarum MK, HI, sunt ut partes diametri a vertice abscissæ NK, NI. Quod erat demonstrandum. Nomen autem hujus sectionis, hanc proprietatem habentis, est *Parabola*.

COROLL. I. Hinc habetur, quod si fiat, ut NK ad KM, ita KM ad aliam NF, vertici N diametri NK perpendiculariter applicatam; ut quadratum MK erit æquale rectangulo KNF, ita cujusvis alterius ordinatæ HI quadratum erit æquale rectangulo INF: quia hæc rectangula eandem altitudinem NF habentia sunt, ut abscissæ KN, IN, adeoque ut ordinatarum quadrata MK, HI illis proportionalia. Et hæc constans linea NF ab Antiquis *Latus rectum*, a Recentioribus *Parameter* Parabolæ appellatur.

COROLL. II. Ducta quoque NE diametro basis Coni parallela, lateribus trianguli per axem terminata, si fiat ut NK ad KD, vel ut AE ad EN, ita EN ad NF; erit eadem NF Latus rectum, seu Parameter ipsius Parabolæ. Nam BK æqualis EN (ob parallelogrammum BENK) erit ad NF, ut AE ad EN, sive (ob similia triangula AEN, NKD) ut NK ad KD; & ideò rectangulum BKD, idest quadratum MK, æquabitur rectangulo KNF.

COROLL. III. Idem parameter NF reperitur, si fiat, ut rectangulum laterum trianguli per axem BAD ad quadratum basis BD, ita AN ad NF. Nam rectangulum BAD ad BD quadratum est, ut rectangulum EAN ad quadratum EN, propter has lineas

illis

illis proportionales: sed quadratum EN æquatur rectangulo EA in NF parametrum (*ex Coroll. præc.* cum sint lineæ EA, EN, NF continuè proportionales); ergo BAD rectangulum ad BD quadratum est, ut EAN rectangulum ad EA in NF, adeoque ut AN ad NF, ob communem horum rectangulorum altitudinem EA.

PROPOSITIO V.

Iisdem positis, ut in præcedenti propositionis titulo, sed communi sectione trianguli per axem, & plani secantis per rectam MKG diametro basis perpendicularem traducti, non jam æquidistante uni laterum trianguli per axem, verùm ita inclinata, ut cum uno latere AD infra verticem A Coni ad punctum N, & cum altero latere AB supra verticem A conveniat ad punctum Q; ordinatarum sectionis MNG quadrata MK, HI erunt, ut rectangula QKN, QIN diametri partibus inter easdem ordinatas, & utrumque terminum N, Q diametri ipsius interjectis comprehensa. Eodemque plano ad alteram oppositam superficiem Conicam producto, similis sectio l Q h inde resultabit, cujus ordinatarum quadrata, sive invicem, sive cum quadratis ordinatarum inferioris sectionis MNG comparata, erunt pariter, ut rectangula diametri partibus, inter ipsas, & utrumque verticem Q, N positis, comprehensa. Fig. 18.

Vocentur autem ambæ *Sectiones Oppositæ*, & utraque ipsarum *Hyperbola*, ac diametri portio NQ, utrique vertici interjecta, *Latus transversum* nuncupetur.

Ducta per punctum I, ubi quælibet ordinata HI ad diametrum NK sectionis hujus applicatur, recta PIV diametro basis BD parallela; utique planum per ipsas VP, HIL traductum, utpote basi

basi DMB æquidistans, efficiet circulum HVP; adeoque quadratum MK ad quadratum HI erit, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV; quorum ratio componitur ex ratione BK ad PI (quæ eadem est KQ ad QI), & ex ratione DK ad VI (quæ eadem est KN ad NI); quemadmodum & ratio rectanguli QKN ad rectangulum QIN ex iisdem rationibus componitur (23. *VI. Elem.*): quare est quadratum MK ad HI quadratum, ut QKN ad QIN. Idemque probabitur de ordinatis superioris oppositæ sectionis *l* Q *b*: Unde constat propositum. Vocatur autem qualibet ex hisce oppositis sectionibus *Hyperbola*, & diametri portio QN *Latus transversum* nuncupatur.

COROLL. I. Si fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, ad punctum K diametro NK perpendiculariter applicanda, & juncta QZ, ad ipsam producantur rectæ NF, IS parallelæ KZ; ipsa NF ex vertice N ducta *Latus rectum*, sive *Parameter* hyperbolæ erit: cui hæc proprietas convenit, quod ut quadratum MK mediæ proportionalis inter NK, & KZ, æquatur rectangulo NKZ, quod parametro NF applicatur, sed cum excessu rectanguli FYZ similis QNF rectangulo, ex latere transverso QN, & recto NF comprehenso: ac similiter quadratum cujusvis alterius ordinatæ HI æquabitur rectangulo NIS, eidem parametro NF applicato, sed (ducta FRY parallela NK, secante IS, KZ in R, Y) cum excessu rectanguli FRS, pariter similis dicto rectangulo QNF. Nam quia KZ ad IS est ut KQ ad QI, ratione KN ad NI utrinque adjecta, erit rectangulum ZKN ad rectangulum NIS, ut rectangulum QKN ad QIN, sive ut MK quadratum ad HI quadratum; unde, ut MK quadratum æquatur ZKN, ita HI quadratum æquatur NIS.

COROLL. II. Item si fiat, ut NK ad KB, ita KD ad KZ, juncta, ut supra, QZ, cui occurrat in F re-

F recta NF ipsi KZ parallela, erit NF eadem parameter: nam ZKN rectangulum æquabitur BKD, adeoque & KM quadrato (*ut in Coroll. præced.*), unde etiam SIN æquabitur quadrato HI.

COROLL. III. Similiter ducta NE parallela DB, si fiat ut NK ad KD, ita NE ad NF, erit hæc parameter: nam juncta QF, ac producta, ut secet rectas IS, KZ eidem NF parallelas in S, & Z, erit tam BK ad NE, quàm KZ ad NF in eadem ratione KQ ad QN, unde BK ad KZ, ut NE ad NF, sive ut NK ad KD; & ideò rectangulum BKD (quod idem est cum quadrato MK) æquabitur NKZ, ut supra.

COROLL. IV. Ducta verò ex vertice Coni A in plano trianguli per axem recta AO parallela NK; cum sit (*ut in Coroll. præced.*) FN ad NE, ut KD ad NK, sive ut DO ad OA, itemque NE ad NQ, ut OB ad OA; erit FN ad NQ in ratione composita ex DO ad OA, & ex BO ad OA, videlicet ut rectangulum DOB ad quadratum OA: unde si fiat ut quadratum OA ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad NF, erit hæc latus rectum, sive Parameter.

COROLL. V. Imò etiam ducta AT ex Coni vertice parallela diametro basis DB, & convenien-te cum transverso latere NQ in T, erit rectangu-lum QTN ad quadratum AT, ut transversum latus NQ ad rectum NF: quippe cùm sit NT ad TA, ut NK ad KD, sive ut AO ad OD; necnon QT ad TA, ut AO ad OB, erit rectangulum QTN ad quadratum AT, ut quadratum AO ad DOB rectangulum, adeoque ut QN ad NF (*ex Coroll. præced.*).

COROLL. VI. Denique cujuslibet ordinatæ MK quadratum ad rectangulum QKN, vel quadratum HI ad QIN rectangulum erit, ut rectum latus NF ad transversum NQ: nam etiam rectangulum ZKN, quod æquatur quadrato MK, ad QKN eſt, ut ZK ad QK (ob eandem altitudinem NK), & SIN, quod æquatur quadrato HI, eſt ad QIN, ut SI ad QI: verùm hæ rationes ZK ad QK, aut SI ad QI ſunt eædem, ac ratio lateris recti NF ad NQ tranſverſum; ergo quadrata ordinatarum, & rectangula ex diametri partibus ſibi correſpondentibus ſunt, ut parameter, ſeu latus rectum, ad latus tranſverſum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 19. *Quod ſi KN communis ſectio trianguli per axem, & plani ſecantis, per rectam MKG diametro baſis BD, vel alterius æquidiſtantis circuli diametro ordinatam, tranſeuntis, conveniat cum utroque latere infra verticem A, ad puncta N, Q: erunt hujus ſectionis QHN ordinatarum MK, HI quadrata, ut rectangula partium diametri, inter utrumque terminum Q, N ab ipſis ordinatis ſecti, nempe ut QKN ad QIN. Et ejuſmodi ſectio (ſi nec baſi parallela ſit, nec ipſi ſubcontrariè poſita, adeoque circulus non fuerit) ſpeciali nomine* Ellipſis *nuncupabitur, cujus pariter* Latus tranſverſum *erit ipſa QN.*

EAdem demonſtratione, qua ſuperior propoſitio, hæc quoque probatur: unde non intereſt hic illam iterare, ſed huic figuræ ipſa eſt à Lectoribus applicanda.

COROLL. I. Si fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, diametro QN in puncto K perpendiculariter applicatam, & juncta QZ ſecet in F rectam NF ipſi NZ parallelam, cui etiam æquidiſtans ducatur IS, cuilibet alteri ordinatæ HI correſpondens; erit NF *Latus rectum*, ſeu *Parameter* hujus ſectionis: & quarumlibet ordinatarum quadrata MK, HI erunt

reſpe-

respectivè æqualia rectangulis ZKN, SIN, quæ sunt applicata Parametro NF, sed cum defectu rectangulorum (ducta FRY parallela NQ, secante ipsas KZ, IS in Y, R) ZYF, SRF similium rectangulo QNF sub transverso latere QN, & sub recto NF comprehenso. Idque probatur (*ut in Coroll.* 1. *Prop. praced.*) permutato in *defectum* illo *excessu* rectangulorum applicatorum parametro, æqualium quadratis ordinatarum Hyperbolæ, à dicto excessu sic nuncupatæ, uti ab hoc defectu nomen Ellipsis deducitur.

COROLL. II. Si pariter fiat, ut NK ad KB, ita KD, ad KZ, juncta QZ secans NF in F determinabit parametrum, (*ut in Coroll.* 2. *Prop. praced.*)

COROLL. III. Item si fiat NK ad KD, ita NE, parallela BD, ad NF, erit hæc latus rectum (*ut Coroll.* 3. *Prop. praced.*)

COROLL. IV. Ducta quoque AO parallela NQ, erit ut AO quadratum ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad rectum NF (*ut Coroll.* 4. *Prop. praced.*)

COROLL. V. Et similiter ducta AT parallela BD, conveniente cum QN in T, erit rectangulum QTN ad AT quadratum, ut transversum latus QN ad rectum NF (*ut in Coroll.* 5. *Prop. praced.*)

COROLL. VI. Quodlibet autem quadratum ordinatæ ad rectangulum sub diametri partibus, putâ MK quadratum ad QKN, aut HI quadratum ad QIN, est ut latus rectum NF ad transversum NQ (*ut in Coroll.* 6. *praced. Prop.*)

PROPOSITIO VII.

Fig. 20. 21. 22. *Si ex eodem Cono ABD per plana invicem parallela MNG, SVR duæ Parabolæ, aut duæ Hyperbolæ, vel duæ Ellipses (aut etiam quovis numero plures) secentur, earum Parametri, seu latera recta NF, VT, erunt proportionalia distantiis NA, VA suorum verticum N, V, à coni vertice A.*

NAm (*ex Coroll. 2. Prop. 4. & Coroll. 3. Prop. 5. ac 6.*) est NK ad KD, ut EN ad parametrum NF: ac similiter foret, ut VO ad OD, ita PV ad parametrum VT alterius sectionis priori parallelæ; quare cùm sit eadem ratio NK ad KD, & VO ad OD, ob rectas NK, VO parallelas, erit quoque ratio EN ad NF eadem, quæ PV ad VT, ac permutando, erit NF ad VT, ut EN ad PV, sive ut NA ad VA. Quod erat demonstrandum.

COROLL. In Hyperbolis, & Ellipsibus, quoniam pariter transversa latera QN, VL sunt, ut distantiæ à Coni vertice NA, VA, erunt etiam recta latera NF, VT proportionalia transversis QN, VL: & ideò hæ sectiones parallelis planis ab eodem Cono deductæ *similes* dicuntur. Parabolæ autem quælibet semper similes sunt, quippe ob diametrum uni ex lateribus Coni æquidistantem, semper planis parallelis ex eodem Cono deduci possunt.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 23. 24. 25. *In omni sectione conica, si rectum latus NF positum perpendiculare diametro, bifariam secetur in R, ducta RT, quæ in Parabola æquidistet diametro, in reliquis autem sectionibus bifariam secet in C transversam diametrum QN: Dico quadratum*

cu-

cujuslibet ordinatæ MK fore duplum quadrilateri NRTK sibi correspondenti, quod recta KT eidem NF parallela, cum dictis aliis lineis concludit.

Ducatur enim recta FB, in Parabola quidem parallela diametro, in aliis verò sectionibus, cum alio termino Q transversi lateris, terminum F lateris recti conjungens, unde in omnibus evadet ipsi RT parallela, ob QN in C, ac NF in R ab ipsa bifariam sectas in Hyperbola, & Ellipsi, dum utraque FB, RT in Parabola æquidistat diametro; ac juncta NB ab eadem RT bifariam secabitur in S, ut NF ab ipsa bissecatur in R. Quare triangula NSR, SBT, cum habeant ad verticem S æquales angulos, & alios alternos parallelarum pariter æquales, cum æqualibus lateribus NS, SB, erunt invicem æqualia; & communi addito quadrilineo NSTK, erit triangulum NKB æquale quadrilatero NRTK: sed ex genesi sectionum patet, ordinatæ MK quadratum æquari rectangulo NKB, adeoque duplo trianguli NKB; ergo idem quadratum ordinatæ duplum est quadrilateri NRTK. Quod, &c.

Punctum illud C, quod in Hyperbolis, & Ellipsibus bifariam secat latus transversum QN, *centrum* harum sectionum vocabitur. Recta verò QF, sive FB *directrix*; & CR, sive RT (etiam in Parabola) *subdirectrix* poterit appellari.

COROLL. Excessus quadrati cujuslibet ordinatæ PV supra quadratum alterius ordinatæ MK æquabitur duplo excessui quadrilateri NRXV, supra NRTK, idest duplo quadrilinei KVXT: & ille quadratorum excessus (ducta MG diametro parallela) est rectangulum PGD (5.*II Elem.*) quare hoc rectangulum æquatur duplo KVXT.

PROPOSITIO IX.

Fig. 26. 27. 28. *Data cuilibet Coni sectioni tangentem ducere ad punctum in ejus perimetro datum.*

VEl datum punctum est in sectionis vertice N, & tunc ducta NE parallela ordinatis, erit tangens: si enim ex puncto N intra sectionem caderet, ab una tantum parte diametri chordam efficeret, unde diameter bifariam non secaret omnes parallelas ordinatis intra sectionem positas; quod est contra primam ex secundis definitionibus; tangit ergo hæc recta in dato puncto sectionem.

Vel datum punctum extra verticem in perimetro sectionis est, puta in M; & tunc ducta subdirectrice RT, ordinetur MK ad diametrum sectionis, & KT parallela semiparametro NR, usque ad subdirectricem pertingens in T, atque ipsis KT, MK tertia proportionalis KG in diametro ponatur supra ordinatam; Juncta GM tanget sectionem. Ducatur enim recta GT, & ordinetur ad diametrum alia quævis HL, occurrens ipsi GM in P; nec non ducatur LV parallela KT, subdirectricem secans in V, & rectam GT in D. Quoniam igitur sunt tres proportionales KT, KM, & KG, rectangulum GKT æquatur quadrato MK, adeoque est duplum quadrilateri NRTK (*ex Prop.* 8.): Sed idem rectangulum est quoque duplum trianguli GKT; ergo hoc triangulum dicto quadrilatero æquabitur. Et quia ut TK ad KG, ita DL ad LG, atque ut GK ad KM, ita GL ad LP; quemadmodum proportionales sunt TK, KM, KG, ita etiam DL, LP, LG erunt continuè proportionales; unde quadratum LP æquabitur rectangulo GLD, seu duplum erit trianguli GLD, uti quadratum ordinatæ HL

du-

duplum est quadrilateri NLVR. Sed triangulum GLD semper majus erit ipso quadrilatero NLVR; quia si LH est ordinata infra MK, triangulo GKT additur trapezium KLDT majus quadrilatero KLVT, quod adjungitur NKTR; si verò *b l* sit supra MK, triangulo GKT aufertur trapezium *l* KT *d* minus quadrilatero *l* KT *u*, quod aufertur ab ipso NKTR; unde semper majus resultat triangulum GLD quadrilineo NLVR, aut triangulum G *l d* quadrangulo N *l u* R. Itaque quadratum PL majus est quadrato HL, & quadratum *p l* majus quadrato *b l*; unde quælibet puncta P, aut *p*, præter punctum M, rectæ GM sunt extra sectionem; & ideò GM est ejus tangens. Quod erat, &c.

Illa diametri portio KG, quæ inter ordinatam, & concursum tangentis intercipitur, *subtangens* vocatur.

COROLL. I. Hinc patet, tangentem harum sectionum in unico puncto cum earum curva convenire.

COROLL. II. Producta KT ad directricem FB in B, quoniam ex natura harum sectionum, rectangulum NKB æquatur quadrato ordinatæ MK (*ex Corol.* 1. *Prop.* 4. 5. *&* 6.), & hoc quadratum æquatur rectangulo GKT, erit NKB æquale GKT; & ideò subtangens GK ad abscissam à vertice NK erit, ut KB ad KT: unde tangens dati puncti M etiam determinabitur, si fiat, ut KT ad KB, ita KN ad KG, & ad M juncta GM erit tangens.

COROLL. III. Per conversionem rationis, erit ut KB ad BT, scilicet ad dimidium parametri (nam BT æquatur RF, sive NR), ita subtangens KG ad GN, tangenti, & vertici curvæ interceptam.

COROLL. IV. Item dividendo KT ad TB æqualem semiparametro, erit, ut KN ad NG.

COROLL. V. Item si jungatur BR, quæ occurrat diametro in G, erit KG ſubtangens, cùm ſit KB ad NR, ut KG ad GN *(ex Coroll.3.)*

COROLL. VI. Hinc in Parabola ſemper ſubtangens KG dupla eſt KN abſciſſæ per ordinatam à vertice, uti etiam dupla reliquæ NG, inter verticem, & tangentis occurſum cum diametro: quia KB ſemper æquatur parametro NF, cùm ſit directrix FB parallela diametro; adeoque ſemper KB eſt dupla ſemiparametri NR, aut KT, unde & GK eſt dupla GN, aut NK.

COROLL. VII. At in Hyperbola, & Ellipſi eſt QK ad CK, ut BK ad KT (ob parallelas CT, QB); adeoque etiam, ut GK ad KN *(ex Coroll.2.)*: Unde ſi fiat, ut diſtantia ordinatæ à centro CK ad ejus diſtantiam à remotiore termino tranſverſi QK, ita diſtantia à vertice proximiori KN ad aliam GK, erit hæc ſubtangens quæſita.

COROLL. VIII. Unde rectangulum QKN æquabitur rectangulo CKG, propter QK ad CK, ut GK ad KN.

COROLL. IX. Erit quoque per converſionem rationis, QK ad CQ, ſeu ad CN dimidium tranſverſi lateris, ut ſubtangens GK ad GN interceptam vertice, & tangente.

COROLL. X. Et quia, ob parallelas QB, CR, eſt QG ad GC, ut BG ad GR, quæ ſunt ut GK ad GN (ob parallelas KB, NR), ideò erit QG ad GC, ut QK ad CQ vel CN, cùm iſtæ *(ex Coroll.9.)* ſint in eadem ratione ipſius GK ad GN.

COROLL. XI. Dividendo erit QC ad CG, ut CK ad CQ, vel CN; Unde erunt continuè proportionales CK, CQ, CG, ſive CK, CN, CG; & rectangulum KCG æquabitur quadrato ſemitranſverſi lateris CN, vel CQ: Unde tangens invenietur, ſumta ipſis CK, CN tertia proportionali CG, & jungendo ad punctum M rectam GM.

COROLL. XII. Quoniam QK ad CQ eſt, ut GK
ad

ad GN (*Coroll.*9.), & CQ ad GQ, ut KN ad GK (cùm utraque harum rationum æquetur RB ad BG); ergo ex æquo perturbatè QK ad GQ eſt, ut KN ad GN GN (23.*V.Elem.*), & permutando, QK ad KN, ut GQ ad GN: Unde eſt harmonicè ſecta diameter Hyperbolæ, & Ellipſis per terminos tranſverſi lateris, concurſum ordinatæ, & tangentis; adeoque tangens determinatur, faciendo ejuſmodi ſectionem harmonicam, nempe ut QK ad KN, ita punctum G ſtatuendo, ut ſit GQ ad GN in eadem ratione.

COROLL. XIII. Hinc alia eruitur generalis conſtitutio, pro tangente cujuſvis ſectionis Conicæ ad datum punctum M. Ducta enim ordinata MK, & ex vertice N huic parallela NI, quæ erit tangens verticalis; ſi ex M ducatur in Parabola MI parallela diametro, in Ellipſi verò & Hyperbola jungatur ad alium tranſverſi lateris terminum Q recta MQ, ſecans verticalem illam tangentem in I, ſi ubique ſecetur bifariam NI in E, juncta ME erit tangens. Nam ſi hæc ad diametrum producatur in G, patet fore in Parabola GK duplam GN, ut MK æqualis NI, eſt dupla EN, & ideò (*per Coroll.*6.) GM eſt tangens. In Hyperbola verò, & Ellipſi, ducta etiam QO parallela ipſi NE, quæ à recta MG producta ſecabitur in O, erit QO ad NE, ut QG ad GN; ſed in eadem ratione eſt etiam QO ad IE (utpote æqualem ipſi NE), quæ eſt ut QM ad MI, vel ut QK ad KN; ergo QG ad GN eſt, ut QK ad KN: unde harmonicè ſecta eſt diameter in G, atque in terminis tranſverſi lateris, & occurſu ordinatæ; ergo MG eſt tangens (*ex Coroll.*12.)

COROLL. XIV. Quælibet Hyperbolæ tangens MG ſemper infra centrum C, ſupra verticem N cum diametro concurrit: nam QK major eſt KN, ergo & QG eſt major GN, cùm ſint hæ rectæ proportionales.

CO-

COROLL. XV. Ducta ex centro C Ellipsis, & Hyperbolæ recta CX parallela NE, conveniente cum MQ in X, patet fore CX medietatem IN (ut CQ medietas est QN), adeoque æquari NE, [illegible] IE, ac junctis CE, XE, fieri parallelogramma CXEN, CXIE, QXEC. Quare ad ducendam tangentem ex dato puncto M, sufficiet jungere ad remotiorem diametri terminum Q rectam MQ, & ex centro ducta CX parallela ordinatis, factoque uno ex dictis parallelogrammis, juncta ex M ad angulum E (sive ducta XE dumtaxat, parallela, & æquali semidiametro CN, junctaque ex M ad punctum E), ipsa recta ME tangens erit.

*Fig.*29. 30.31. COROLL. XVI. Denique, si diameter NK in qualibet sectione sit ejus axis, posita in ipso KS æquali KT, ad partem subtangenti oppositam, juncta SM erit perpendicularis Curvæ. Nam cum tangente GM rectum angulum efficiet SMG; nam cum sit TK, sive KS illi æqualis, ad KM, ut KM ad KG, quadratum M*K* æquabitur S*K*G rectangulo, & ideò cùm sit M*K* perpendicularis axi GS, erit SMG triangulum rectangulum, cujus normalis M*K* est media inter segmenta basis S*K*, *K*G (8.*VI.Elem.*). Dicetur autem ipsa *KS subnormalis*, quæ in Parabola semper erit æquali semiparametro NR, cui æquatur *K*T: in Hyperbola verò, & Ellipsi erit ad semiparametrum, ut distantia ordinatæ à centro C*K* ad semiaxem transversum CN, ita enim est & *K*T ad NR: sive eadem subnormalis *KS* æqualis *K*T est ad distantiam ordinatæ à centro C*K*, ut rectum latus NF ad transversum QN, ob triangulorum T*K*C, FNQ similitudinem.

PRO-

PROPOSITIO X.

In Parabola qualibet recta MD, parallela ejus diametro NK, est pariter & ipsa diameter, bifariam secans omnes illi ordinatas HF, NZ, parallelas tangenti MG; & quadrata pariter ejus ordinatarum HD, NX, sunt ut abscissæ MD, MX à vertice M talis diametri. Fig. 32.

Ex vertice N diametri NK, unde genita est Parabola, ducta tangente NE, quæ occurrat ipsi MD in I, ducatur quoque NXZ parallela tangenti MG, quæ ipsi MD occurrat in X, & Curvæ in alio puncto Z: ducantur quoque ordinatæ ad diametrum NK rectæ MK, & ZT, secans MD in V. Erit quadratum MK ad quadratum ZT, ut NK ad TN, ex natura Parabolæ (*Prop.*4.), sive ut parallelogrammum NKMI ad aliud æquè altum NTVI: at similia triangula GKM, NTZ sunt pariter, ut quadrata homologorum laterum MK, ZT (19.*VI. Elem.*); ergo hæc triangula sunt ut dicta parallelogramma: sed triangulum GKM æquatur NKMI, ob ejus basim GK duplam basis hujus NK (*Coroll.*6 .*Prop.*9.), & parem utriusque altitudinem; ergo etiam triangulum NTZ æquabitur NTVI: & ablato communi NXVT erit triangulum XVZ æquale simili triangulo XIN; quare & horum latera homologa XZ, XN erunt æqualia: igitur recta MD bifariam dividit in X ipsam NZ tangenti MG parallelam. Similiter ducta qualibet alia parallela HDF supra NZ, quæ secet NK in P, & NI in Æ, & ordinatis ad priorem diametrum NK, HL, FB, secantibus ipsam MD in R, S; cùm sit triangulum PLH ad GKM sibi simile, ut LH quadratum ad quadratum KM, idest, ut NL ad NK, sive ut NLRI ad NKMI; quemadmodum GKM æquatur

tur NKMI, etiam PLH erit æquale NLRI; & aliud ſimile triangulum PFB æquabitur NBSI, cum ſit ad GKM pariter, ut quadratum FB ad quadratum MK, nempe ut BN ad NK, ſive ut NBSI ad NKMI: quare differentia triangulorum PFB, PLH, ideſt quadrilineum LHFB, æquabitur differentiæ parallelogrammorum ipſis triangulis æqualium NBSI, & NLRI, ideſt parallelogrammo LBSR; & ablato communi ſpatio LBSDH, remanebunt triangula DSF, DHR æqualia; unde cum ſimilia ſint, erunt homologa latera DF, DH pariter æqualia. Similiter ducta infra NZ recta *h f* parallela tangenti MG, quæ ſecet NK in *p*, NI in *e*, atque ordinatis *h* L, *f b* ad diametrum NK, ſecantibus ipſam MD in R, *s*, oſtendetur triangulum *h p* L æquari NLRI; unde utrinque addito L *b s* R, erit *h p b s* R æquale ipſi N *b s* I parallelogrammo, quod erit æquale triangulo *p b f* (ob eandem rationem in ſimilibus litteris ſupra adductam): quare cùm proveniat *h p b s* R æquale *p b f*, ablato communi *pbsd*, reſultabit triangulum *h d* R ſimile, & æquale *f d s*; ideoque & homologa latera *h d*, *d f* æqualia erunt. Igitur recta MD ſecat bifariam quaslibet parallelas tangenti GM; unde reſpectu harum ordinatarum, eſt quoque MD diameter.

Quia verò propter GN æqualem NK, æqualem IM, triangula ſimilia GEN, IEM æquantur, addito utrinque NEMX, parallelogrammum GNXM æquatur triangulo INX: pariterque iiſdem triangulis GEN, IEM, addito NEMSB, quadrilineum GMSB æquatur parallelogrammo INBS, cui oſtenſum eſt æquale triangulum PBF; ergo ex hoc triangulo, & ex GMSB, ablato trapezio PDSB, erit triangulum DSF æquale parallelogrammo GPDM; quare triangulum INX, ſive illi æquale XVZ ad triangulum DSF eidem ſimile, adeoque & quadratum XZ ad quadratum DF, ſive quadratum NX

ad

ad quadratum HD, erit ut parallelogrammum GNXM ad GPDM, five ut XM ad DM. Quod erat demonftrandum.

COROLL. I. Hinc quæcunque refpectu diametri primigenii NK, ejufque ordinatarum, dicta funt, ad quamlibet aliam diametrum MD referri poffunt, circa tangentem, velut NI, cujus fubtangens XI pariter dupla erit abfciffæ MX; & circa parametrum, feu latus rectum huic alteri diametro MD determinandum, quod erit tertia proportionalis poft quamlibet abfciffam MD, & ejus ordinatam DF, ut quadratum cujuslibet ordinatæ æquetur rectangulo fuæ abfciffæ in idem latus rectum huic diametro pertinens.

COROLL. II. Notetur autem, quævis triangula fuper ordinatis, fuæ diametro adjacentia, cum fubtenfo latere parallelo tangenti, velut PLH, PBF, NTZ, æquari parallelogrammis fibi correfpondentibus NLRI, NBSI, NTVI, &c. Uti etiam IXN æquatur MXNG, RDH æquatur MDPG, *d f s* æquatur M *d p* G; & fic de aliis.

COROLL. III. Item notetur, triangulum NEG oftenfum æquale IEM: & ob triangulum DHR æquale MDPG, ablato communi MDHO, triangulum ORM æquatur OHPG; unde idem triangulum ORM, cum fimili PLH æquatur triangulo GLO: pariterque ob *b* L æqualem LH, quia triangulum *b p* L æquatur PLH, erit ORM cum *p* L *b* æquale GLO; unde & quadrata OR, HL, aut OR, *b* L æquantur quadrato OL; aut fumtis aliis lateribus homologis, quadrata MR (feu KL), & LP (aut L *p*) quadrato LG æquantur.

COROLL. IV. Similiter ob triangulum XVZ æquale MXNG, extenfa tangente GM, ut fecet ordinatas TZ in Y, atque BF in A, juncto MXZY, evadit triangulum MVY æquale ZNGY: ficuti ob triangulum DFS æquale MDPG, addito utrin-

que

que MDFA, fit triangulum MSA æquale FPGA; & similiter ostendetur triangulum M *s a* æquale *f p* G *a*.

COROLL. V. Hinc triangulo MVY, & huic æquali trapezio ZNGY, addito triangulo simili NTZ, erunt triangula MVY, & NTZ æqualia simili triangulo GTY; adeoque etiam quadrata VY, & TZ æquantur quadrato TY: ficuti addito PFB triangulo ad triangulum MSA, vel ad huic æquale trapezium FPGA; erunt duo similia triangula PFB, MSA æqualia simili triangulo GBA; unde & quadrata BF, SA æquantur quadrato BA: & similiter aliis homologis lateribus acceptis, erunt quadrata MV (seu KT), & NT æqualia quadrato GT; necnon quadrata PB, & MS (seu KB) æqualia quadrato GB; & sic de aliis.

COROLL. VI. Rursus, quoniam triangulum PLH æquatur NLRI, ablato communi NLHÆ, fit triangulum PNÆ æquale ÆHRI, additoque simili triangulo HRD, erunt triangula PNÆ, HRD æqualia ÆDI triangulo simili; unde quadrata homologorum laterum NÆ, & HR æquantur quadrato ÆI: item quadrata PÆ, HD æqualia erunt quadrato ÆD; quod cùm æquale sit rectangulo FÆH cum HD quadrato (6.*II.Elem.*), erit PÆ quadratum æquale FÆH rectangulo. Et similiter, ob triangulum *b p* L æquale NLRI, & addito utrinque NL *b æ*, triangulum *p* N *æ* æquale erit IR *b æ*; unde adjecto triangulo *b* R *d*, erunt duo triangula *p* N *æ* *b* R *d* æqualia simili triangulo *æ* I *d*; adeoque quadrata homologorum laterum *d b*, *p æ* erunt æqualia quadrato *æ d*, seu rectangulo *f æ b*, cum quadrato *d b*; unde quadratum *p æ* erit rectangulo *f æ b* æquale; & *æ p* erit media proportionalis inter *f æ* & *æ b*, sicut PÆ media est proportionalis inter FÆ, & ÆH.

COROLL. VII. Eadem ratione, quoniam quadrata

drata OR,LH æquantur quadrato LO *(ex Coroll.3.)* seu rectangulo *b* OH cum quadrato LH, est quadratum OR æquale rectangulo *b* OH, & ideò est OR media proportionalis inter *b* O, & OH: similiterque, producta ordinata FB ad aliam Curvæ partem in Φ, cum sint quadrata SA, & FB æqualia quadrato BA *(ex Coroll.5.)*, hoc est rectangulo ΦAF cum BF quadrato, erit rectangulum ΦAF æquale quadrato SA, ipsaque SA media proportionalis inter AΦ, & AF.

COROLL. VIII. Quare si duæ tangentes NE, ME conveniunt in E, & uni earum NE parallela ΦA secet aliam tangentem in A, erit rectangulum ex tota secante ΦA in partem externam AF, ad quadratum AM portionis interceptæ ex tangente AM inter contactum, & secantem, ut quadratum parallelæ tangentis NE ad quadratum reliquæ tangentis EM: quippe NE quadratum ad quadratum EM (quod æquatur EG quadrato) est, ut quadratum SA (seu rectangulum ΦAF illi æquale) ad quadratum AM. Sic etiam secantis ÆHF parallelæ tangenti ME rectangulum FÆH, est ad quadratum ÆN, ut quadratum PÆ illi rectangulo æquale *(ex Coroll.6.)* ad quadratum ÆN, sive ut GE, vel ei æqualis EM quadratum, ad quadratum EN.

PROPOSITIO XI.

In Parabola AND, cujus basis AD, diameter NB, latus rectum NF, quælibet rectæ diametro parallelæ ME, HG sunt, ut rectangula partium basis AED, AGD; & etiam basi producta, si extra parabolam agantur parallelæ diametro e m, g h *erunt hæ quoque, ut rectangula A* e *D, A* g *D.* *Fig.33.*

NAm ut quadratum BD æquatur rectangulo BNF, ita quadratum alterius ordinatæ HP, vel

vel *h p* æquatur rectangulo parametri NF in abscissam NP, seu N *p*; ergo differentia quadratorum BD, & PH, seu BG illi æqualis, quæ est rectangulum AGD, æquatur rectangulo ejusdem NF in differentiam abscissarum NB, NP, quæ est PB æqualis HG: & similiter differentia quadratorum BD, *p b*, sive illi æqualis B *g*, quæ est rectangulum A *g* D, æquabitur rectangulo ejusdem NF in B *p*, seu *g h*, quæ est differentia BN ab N *p*: Similiter ostendetur, rectangulum AED æquari NF in ME; & rectangulum A *e* D æquari NF in *m e*; ergo hæ lineæ parallelæ diametro, ME, HG, sunt ut rectangula AED, AGD, quia illæ lineæ in eandem parametrum NF ductæ, illis rectangulis sunt æquales; ac similiter *e m* ad *g h* erunt, ut rectangula ipsis corrispondentia A *e* D, A *g* D. Quod erat, &c.

COROLL. Producta HP ad alteram diametri partem in L, quæ secat ME in I, rectangulum quoque AED ad LIH erit, ut recta ME ad MI: quippe eodem modo NF in ME dat rectangulum æquale AED, & eadem NF in MI dabit rectangulum æquale LIH: Et similiter producta *h p* in *l*, secante *e m* in *i*, rectangulum A *e* D æquale NF in *e m*, ad rectangulum *l i h*, quod pariter æquabitur rectangulo NF in *m i*, erit ut *e m* ad *m i*.

PROPOSITIO XII.

Fig. 34. & 35. *In Ellipsi, & oppositis Hyperbolicis sectionibus, quælibet recta MC per centrum C extensa, ad alteram partem occurrit sectioni in S; atque in centro bifariam dividitur; & ex ejus terminis M, S curvam tangentes MG, SP sunt parallelæ, & æquales.*

ORdinata MK ad priorem diametrum NQ, sumtaque CF æquali CK, ordinetur ad alte-

alteram ejus diametri partem FS. Juncta SC; quoniam differentia quadratorum NC, CK, ideft rectangulum NKQ æquabitur differentiæ aliorum quadratorum CQ, CF illis respectivè æqualium, ideft rectangulo NFQ (5. & 6. 11. *Elem.*); ipsarumque ordinatarum MK, SF quadrata sunt dictis rectangulis proportionalia (*ex Prop.* 5. & 6.); ergo hæc quadrata pariter æqualia erunt: Unde quia MK æquatur FS, & CK æquatur CF, & anguli alterni parallelarum MKC, SFC sunt æquales, erit quoque CM basis trianguli CKM æqualis CS basi trianguli CFS, & angulus MCK erit æqualis SCF; unde sicut ille cum angulo MCF duos rectos complet, ita hic cum eodem idem efficit; adeoque CS est in directum ipsi MC, ob angulos SCF, MCF binis rectis æquales. Igitur ipsa MC producta incidit alteri parti sectionis in S, & ipsa MCS bifariam divisa est in centro C. Quoniam verò ductis tangentibus MG, SP, rectangulum GCK æquatur quadrato semidiametri CN (*ex Coroll.* [illegible] *Prop.* 9.), & similiter rectangulum PCF æquatur quadrato CQ; sicut CN æquatur CQ, ita rectangulum GCK æquabitur PCF: estque CK æqualis CF; ergo etiam CG æquatur CP; & propter CM æqualem CS, & angulos æquales MCG, SCP, erunt horum triangulorum bases MG, SP æquales, atque etiam parallelæ propter alternos angulos MGC, SPC pariter æquales. Quod erat &c.

COROLL. I. Producta SF ad alteram sectionis partem in E, erit FE æqualis FS, adeoque & æqualis KM sibi parallelæ; unde juncta ME parallela erit, & æqualis ipsi KF.

COROLL. II. Et ducta per centrum C ordinatis MK, EF parallela CH, bifariam secabit ipsam EM in B (& sic omnes alias huic parallelas, jungentes terminos æqualium ordinatarum ad diametrum NQ). Nam evadet BM æqualis CK, & BE æqualis CF, cum sint latera opposita parallelogrammorum, & posita jam fuerit CF æqualis CK. Unde ipsa quoque CH erit diameter, cui ME, TL ordinari possunt parallelæ priori diametro, & bifariam in B, R ab ipsa HC dividentur.

Dicitur autem hæc alia *Diameter secundaria*, & priori *Conjugata*. In Ellipsi quidem ab ipso ejus perimetro determinata ad puncta H, I, existente CI æquali CH, cum & ipsa ordinetur diametro NQ, adeoque ab ipsa bifariam secetur in C. Et quia (*ex coroll.6.prop.6.*) quadratum ordinatæ HC ad rectangulum partium diametri QCN, adeoque ad quadratum CN, est ut latus rectum NV ad transversum NQ, etiam quadruplicando terminos, quadratum HI ad NQ quadratum, erit ut NV ad NQ, & ideò HI secundaria diameter conjugata est media proportionalis inter parametrum NV, & primariam diametrum transversam NQ. In Hyperbola verò determinanda pariter est media quædam proportionalis HI inter latus rectum NV, & transversum NQ, atque ita disponenda per centrum C æquidistans ordinatis diametri NQ, ut in ipso puncto C bifariam partita maneat: Et hæc erit secundaria diameter priori NQ conjugata.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. & 35. *In Ellipsi etiam ordinatarum ad secundariam diametrum IH quadrata BM, RT sunt, ut rectangula partium ejusdem diametri HBI, HRI, idest ut differentia quadrati HC à quadrato BC, ad differentiam ejusdem quadrati HC ab RC quadrato. At in Hyperbola quadrata BM, RT ordinatarum ad secundariam diametrum HI, sunt ut summa quadrati HC, & quadrati BC, ad summam ejusdem HC quadrati, & quadrati RC.*

Pri-

PRimum patet, quia ordinatis MK, TZ ad priorem diametrum NQ, cum sit rectangulum NCQ, seu quadratum CN, ad rectangulum QKN, ut quadratum CH ad quadratum KM, seu CB; permutando, totum quadratum CN ad totum quadratum CH, est ut rectangulum QKN, ex primo ablatum, ad quadratum CB, ex secundo ablatum: quare & reliquum quadratum CK, seu BM ad reliquum rectangulum HBI, est ut totum quadratum CN ad totum quadratum CH (19, *V. elem.*). Eodem modo pariter ostendetur, esse quadratum RT ad rectangulum HRI in eadem ratione quadrati CN ad CH quadratum; ergo quadrata ipsa BM, & RT sunt, ut rectangula partium secundariæ diametri, HBI, & HRI, quæ sunt differentiæ quadratorum BC, RC ab eodem CH quadrato.

Secundum autem ostenditur, quia in Hyperbola, cùm sit rectangulum QKN ad quadratum MK, seu BC, ut transversum latus QN ad rectum NV, sive ut quadratum NQ ad quadratum HI, quæ media proportionalis est inter NQ, & NV; seu sumtis subquadruplis, ut quadratum CN ad CH quadratum, etiam summa antecedentium ad summam consequentium, nempe QKN cum CN quadrato, quod est CK, seu BM quadratum, ad summam consequentium, idest ad quadratum BC cum CH quadrato, in eadem ratione erit unius antecedentis ad suum consequens, nempe ut CN quadratum ad CH quadratum (12. *V. Elem.*): & quia eodem modo, RT quadratum ad summam quadratorum RC, & CH in eadem ratione quadrati CN ad quadratum CH esse, probabitur; igitur quadrata BM, RT sunt, ut summa quadratorum BC, CH, ad summam quadratorum RC, & CH: quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Patet in Ellipsi, quadratum cu-

 jusli-

juslibet ordinatæ BM ad rectangulum partium suæ diametri secundariæ HBI esse, ut transversum QN ad rectum NV, cùm sit, ut quadratum CN ad quadratum CH, vel NQ quadratum ad HI quadratum, quæ sunt in eadem ratione.

COROLL. II. Unde posita HX quarta proportionali ad NV, HI, QN, erit ipsa HX latus rectum conjugatæ diametri IH: nam permutando HX ad HI erit, ut QN ad NV, adeoque ordinatæ BM quadratum ad rectangulum HBI, (& quadratum alterius ordinatæ TR ad rectangulum HRI) est, ut hæc parameter, seu rectum latus HX, ad transversum HI.

COROLL. III. In Hyperbola verò MB quadratum ad summam quadratorum BC, HC est, ut NC quadratum ad HC quadratum, sive ut QN ad NV, seu pariter sumta HX quarta proportionali post NV, HI, QN, ut ipsa HX ad HI: adeoque ipsa HX erit latus rectum, seu parameter diametri illius secundariæ HI: quæ pertineret ad binas alias Hyperbolas, diametro transversa HI descriptas, velut Ii, & HAh: quæ duæ Hyperbolæ prioribus NM, QS *Conjugatæ* appellantur.

COROLL. IV. Et quia ordinata AR, intra unam ex his conjugatis Hyperbolis, ad diametrum HI, habet quadratum suum AR ad rectangulum IRH, ut latus rectum HX ad transversum HI; erit ergo quadratum TR, aut LR ad summam quadratorum RC, CH, ut quadratum AR ad rectangulum IRH, cum utraque ratio sit eadem, quæ HX ad HI.

COROLL. V. Et permutando LR quadratum ad quadratum AR, ut summa quadratorum RC, & CH ad rectangulum IRH, quod est ipsorum differentia; ac dividendo, LR quadratum, demto AR quadrato, idest rectangulum TAL, ad quadratum

dratum AR, erit ut quadratum HC, cum quadrato CR, demto IRH rectangulo (idest cum quadrato eodem HC), adeoque ut duplum quadrati HC, ad ipsum IRH rectangulum: atque iterum permutando, TAL rectangulum ad duplum quadrati HC, ut quadratum AR ad IRH, sive ut HX ad HI, nempe ut CN quadratum ad CH quadratum, sive ut duplum quadrati CN ad duplum quadrati HC; ideoque illud rectangulum TAL æquatur semper duplo quadrato CN; unde ubique est ejusdem quantitatis.

COROLL. VI. Hinc ex termino H diametri HI, ducta ad ipsam ordinata HY, secante unam ex prioribus Hyperbolis, velut EQS in Y, erit quadratum ipsius HY duplum quadrati CN: ut etiam hinc constat, quia esset ordinatæ HY quadratum, ad summam quadratorum HC, & CH, ut MB quadratum ad summam quadratorum BC, CH, idest ad duplum CH quadrati, ut quadratum CN ad CH quadratum (*ex Coroll.3.*) adeoque ut duplum CN quadrati ad duplum CH; ideoque HY quadratum æquatur duplo quadrati CN.

PROPOSITIO XIV.

Quæcunque alia recta MC in Ellipsi, & oppositis Hyperbolis, per centrum C ducta, est diameter, bifariam secans quaslibet NZ, HF ipsi applicatas parallelas tangenti GM. Fig.36. & 37.

PEr verticem N prioris datæ diametri NQ agatur tangens NI, secans ipsam CM in I, & tangentem MG in E, illasque applicatas HF, *hf* in Æ, & æ, alteram supra NZ ductam ex vertice N, alteram infra ipsam. Ducantur quoque ad priorem diametrum ordinatæ MK, & ZT, HL, FB, L*h*, *fb*, concurrentes cum CM ad puncta

V,R,S,*s*, & cum tangente MG in punctis Y,O,A,*a*. Quoniam CK ad CN est, ut CN ad CG (*Coroll.* 11. *Prop.* 9.), erit quadratum CK ad quadratum CN, seu triangulum CKM ad simile CNI, ut CK ad CG, quæ sunt, ut CKM triangulum ad CGM triangulum, quæ sunt æquè alta; quare triangula CNI, CGM sunt æqualia; & horum alterutro sublato à triangulo CKM, erit trapezium NKMI æquale triangulo GKM: est autem hoc triangulum ad alia similia NTZ, PLH, PBF, *p* L *h*, *p b f*, ut quadratum KM ad quadrata homologorum laterum TZ, LH, BF, L *h*, *b f*, hoc est ex natura Ellipsis, & Hyperbolæ (*Prop.* 5. & 6.) ut rectangulum QKN, ad rectangula illis correspondentia QTN, QLN, QBN, QLN, Q *b* N, nempe ut differentia quadrati CN à quadrato CK, ad differentiam ejusdem quadrati CN à quadratis CT, CL, CB, CL, C *b*, sive ob analogiam triangulorum similium, cum quadratis laterum homologorum, ut differentia trianguli CNI à triangulo CKM, ad differentias ejusdem CNI à triangulis CTV, CLR, CBS, CLR, C *b s*; hoc est, ut trapezium NKMI ad trapezia NTVI, NLRI, NBSI, NLRI, N *b s* I; ut igitur triangulum GKM æquatur NKMI, ita NTZ æquabitur NTVI, & PLH erit æquale NLRI, ac PBF erit æquale NBSI, ac cætera triangula cæteris trapeziis æquabuntur. Itaque ex NTZ, & æquali spatio NTVI, ablato NTVX, remanebit XVZ æquale triangulo sibi simili XIN, quorum latera homologa XZ, & XN erunt æqualia. Similiter differentia triangulorum PBF, PLH, nempe trapezium LBFH, æqualis cum sit differentiæ trapeziorum illis æqualium NBSI, NLRI, idest trapezio LBSR, si ex his duobus trapeziis LBFH, & LBSR, auferatur commune spatium LBSDH, remanebunt æqualia similia triangula SDF, RDH, quorum homologa latera DF, DH æqualia erunt. Item triangulo *p b* L, & illi æquali trapezio NLRI addi-

addito L $b\,s$ R, evadet spatium $b\,p\,b\,s$ R æquale N $b\,s$ I, ideſt triangulo $p\,b\,f$ huic trapezio æquali, & ablato communi spatio $p\,b\,s\,d$, remanebit triangulum b R d æquale $f\,s\,d$ sibi simili, unde & eorum homologa latera $b\,d$, $d\,f$ erunt æqualia. Igitur CM est diameter bifariam secans omnes ipsi applicatas NZ, HF, $b\,f$ tangenti MG parallelas. Quod erat demonstrandum.

Porro in Ellipsi fieri potest, ut ordinata $f\,b$ ad priorem diametrum NQ, cadat ultra centrum C, versus Q; & tunc ducta alia verticali tangente Q i, conveniente cum MC in i, erit quoque triangulum $p\,b\,f$ æquale trapezio Q $b\,s\,i$ (quod ad trapezium NKMI, est ut rectangulum Q b N ad QKN, sive ut quadratum $f\,b$ ad MK, aut ut triangulum $p\,b\,f$ ad simile GKM, quod vidimus æquari NKMI), additoque utrinque $s\,b$ C, erit spatium p C $s\,f$ æquale triangulo QC i, seu CNI huic æquali; & ablato C $d\,p$, triangulum $d\,s\,f$ æquabitur N $p\,d$ I, quod æquatur d R b triangulo, propter p L b æquale NLRI, & commune spatium L $p\,d$ R utrinque appositum; ergo æqualium & similium triangulorum $d\,s\,f$, & d R b homologa latera $f\,d$, & $d\,b$ pariter sunt æqualia. Quod erat, &c. Fig. 38.

COROLL. I. Uti ostensum est triangulum CGM æquale CNI, ablato communi quadrilineo CGEI in Hyperbola, & CMEN in Ellipsi, remanet triangulum IEM æquale GEN, & utrique addito NEMX, fit triangulum IXN æquale trapezio MXNG. Fig. 36. 37. 38.

COROLL. II. Pariter iisdem triangulis IEM, GEN addito spatio NEMSB, resultat GMSB æquale NBSI, cui ostensum fuit æquale triangulum PBF; hoc igitur erit æquale GMSB; & utrinque ablato PDSB, resultat triangulum DSF (vel huic æquale DHR) æquale trapezio MDPO. Similiterque iisdem triangulis IEM, GEN, addito N $b\,r$ ME, resultat N bsI, quod vidimus æquari triangulo pbf, æquale G bs M, & ablato $pbsd$, remanet triangulum dsf æquale trapezio M dp G.

COROLL. III. Hinc patet, ad quamlibet aliam diametrum MC ordinatarum quadrata XZ, DF, df, esse ut rectangula partium diametri m XM, m DM, $m\,d$M: sunt enim illa quadrata, ut triangula similia XZV (seu XNI), DFS, dfs, quæ vidimus æquari trapeziis MXNG, MDPG, MdpG, atque adeò esse, ut differentiæ trianguli CMG à triangulis similibus CXN, CDP, Cdp, quæ sunt ut dicta rectangula, nempe ut differentiæ quadrati CM à quadratis homologorum laterum CX, CD, Cd: quare XZ quadratum est ad quadrata DF, df (seu quadratum NX ad quadrata HD, bd), ut rectangulum m XM ad m DM, $m\,d$ M.

COROLL. IV. Hinc quæcunque ostensa sunt, circa tangentes, & circa parametrum diametri primigenii QN, ad quamlibet aliam diametrum per centrum C deductam referri possunt, ob eandem essentialem proprietatem ejus ordinatarum hic demonstratam; nempe, ut tangens MG dividit diametrum QN, ut sint continuè proportionales CK, CN, CG, & GCK æquetur quadrato semidiametri CN, atque harmonica evadat ratio QK ad KN, ut QG ad GN; sic tangens NI secat diametrum m CM, ut CX, CM, CI sint continuè proportionales, & rectangulum XCI æquetur quadrato semidiametri CM; necnon harmonicè secta sit eadem diameter, nempe m X ad XM sit, ut m I ad IM.

COROLL. V. Atque Parameter hujus diametri CM determinabitur, si fiat ut rectangulum partium ipsius m DM ad quadratum ordinatæ DF, ita eadem transversa diameter m M ad aliam lineam; hæc enim (*per Coroll.6. Prop.5.*) Parameter erit, seu Latus rectum, quod se habet ad transversum (ubi quadrata ordinatarum sunt ut rectangula

par-

partium diametri) ut quadratum ordinatæ ad rectangulum ipsi correspondens ex diametri partibus.

COROLL. VI. Quæcunque(*Prop.*10.*Coroll.*3.4. 5. 6.) ostensa sunt in Parabola de æqualitate triangulorum cum quadrilateris correspondentibus, etiam hisce Hyperbolis, & Ellipsibus, ob eandem rationem hic repetendam, conveniunt: nimirum quod ORM æquatur OHPG, unde duo simul triangula PHL, ORM toti GLO æquantur; non tamen quod quadrata HL, OR sint æqualia quadrato LO, quia diametri NK, MD hic non sunt paralleli, ut in parabola; & ideò triangula DHR, PLH non sunt similia. Idem dicendum, de triangulo MSA æquali trapezio FPGA, ac triangulis PBF, MSA æqualibus GAB, & sic de aliis.

COROLL. VII. Quod verò sit rectangulum secantis in partem externam, tangenti & curvæ interpositam, ad quadratum tangentis, putà ΦAF ad AM quadratum, ut tangentis parallelæ secanti NE quadratum ad quadratum alterius contiguæ tangentis EM (& sic etiam FÆH ad quadratum ÆN, aut *fæh* ad *æ* N quadratum, ut ME quadratum ad quadratum EN), etiam in Hyperbola, & Ellipsi obtinet, idque etiamsi ex duabus oppositis Hyperbolis tangentes ductæ forent, invicem convenientes, (*ut Prop.*16.) infra generatim demonstrabitur.

PROPOSITIO XV.

Ex quolibet puncto H in perimetro Hyperbolæ, aut Ellipsis, inter binas diametros CN, CM, sumto (vel etiam extra ipsas in Ellipsi), si agantur HR, HP tangentibus NI, MG parallelæ, usque ad ipsas diametros productæ in R, P; Quadrilaterum PHRC æquabitur triangulo CGM, aut CNI. Fig.39. 40. 41.

Nam

NAm quia triangulum DHR æquatur trapezio DMGP (*Coroll.2. Prop.11.*), utrovis demto in Hyperbola ex triangulo CPD, vel hoc utrivis addito in Ellipsi, resultabit quadrilaterum PHRC æquale triangulo CGM. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Hinc si ex alio puncto A perimetri Hyperbolici, aut Ellipsici, agantur iisdem tangentibus parallelæ AT, AL ad ipsas diametros productæ in T, L, etiam quadrilaterum LATC æquabitur eidem triangulo CGM, adeoque ipsa quadrilatera PHRC, LATC erunt æqualia.

COROLL. II. Convenientibus AT, PH in K, differentiæ cujusvis ex dictis quadrilateris æqualibus ab alio PKTC, nempe trapezia KHRT, PKAL, erunt æqualia.

COROLL. III. Et convenientibus etiam AL, HR in Z addito, vel demto dictis trapeziis AKHZ, fiet AZRT æquale HZLP.

PROPOSITIO XVI.

Fig.42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. *In omni sectione conica, si duæ tangentes ejusdem sectionis, vel Hyperbolarum oppositarum ME, NE conveniant in E, & quapiam recta FÆ, uni tangenti ME parallela, secet curvam in H, F, & aliam tangentem NE in Æ, erit rectangulum FÆH ad quadratum NÆ, ut quadratum ME ad EN quadratum.*

DUcantur per puncta contactus M, N diametri MD, NK, secantes ipsam HF in D, & P, tangentem NE in I, & ME in G, atque parallelam ipsi NE per H ductam in R, K. Erit quadratum ÆD ad triangulum ÆDI, ut quadratum HD ad triangulum HDR alteri simile; unde differentia antecedentium, nempe rectangulum FÆH (nam

HF bi-

HF bifariam dividitur in D à diametro MD, cui eſt ordinata, utpote parallela tangenti ME) ad trapezium IÆHR erit, ut unum antecedens ad unum conſequens, ſive ut quadratum ME ad triangulum EMI, quod pariter eſt, ut ÆD quadratum ad ÆDI: eſtque IÆHR æquale triangulo ÆPN (nam PKH æquatur NKRI in Parabola, & quibuſdam aliis figuris, unde ablato, vel addito NÆHK, ſuperſunt æquales IÆHR, & ÆPN; In Ellipſi verò, & Hyperbolis, ob quadrilineum CRHP æquale triangulo CNI (*ex Prop.*15.), ablato, vel addito CIÆP, aut CRHÆN (*Fig.*49.) reſultat IÆHR æquale ÆPN); & triangulum EMI æquatur ENG (*ex Coroll.*1. *Prop.* 10. & 14.); ergo rectangulum FÆH ad triangulum ÆPN eſt, ut quadratum ME ad triangulum ENG; & permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ME, ut triangulum ÆPN ad triangulum ENG, ſive ut quadratum ÆN ad EN quadratum; unde iterum permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ÆN eſt, ut quadratum ME ad quadratum EN. Quod, &c.

COROLL. I. Ducta MN jungente contactus, quæ ſecet HF in V, erunt FÆ, VÆ, HÆ continuè proportionales, ideſt rectangulum FÆH æquabitur ÆV quadrato, quod pariter ad quadratum ÆN eſt, ut EM quadratum ad quadratum EN, ſicut dictum rectangulum FÆH eſt ad ÆN quadratum.

COROLL. II. In Parabola etiam quadratum ÆP æquabitur rectangulo FÆH: nam ut ME æquatur EG, ob proprietatem tangentis, ita VÆ æqualis erit ÆP; unde utriuſvis quadratum æquatur rectangulo FÆH. *Fig.*42. 43.

COROLL. III. Si plures ſecantes invicem parallelæ FH, $f\,h$ cum aliqua tangente NE concurrant in Æ, æ, Rectangula FÆH, fæ$\,h$ erunt ut quadrata partium interceptarum tangentis NÆ, Næ: nam *Fig.*50.

nam illis æquantur quadrata ÆV, æu, quæ sunt ipsis quadratis NÆ, Næ proportionalia.

Fig. præcedentes CORОLL. IV. Quoniam HF bifariam secta in D à suo diametro, exhibet rectangulum FÆH cum quadrato HD æquale quadrato DÆ, substituto quadrato ÆV dicto rectangulo æquali, erunt quadrata ÆV, & HD simul sumta, æqualia ÆD quadrato.

Fig. 42. 43. COROLL. V. Quoniam in Parabola VÆ æquatur ÆP, rectangulum VHP cum quadrato ÆH æquatur quadrato ÆV, nempe rectangulo FÆH, idest rectangulo FHÆ, cum quadrato ÆH; quare utrinque demto ÆH quadrato, rectangulum VHP æquatur rectangulo FHÆ; & ideò FH ad HP est, ut HV ad HÆ, sive ut reliqua VF ad reliquam PÆ; seu est FH ad HV, ut PH ad HÆ, sive ut PK ad KN.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. *Si rectæ HF, TK, binis tangentibus MA, NA, convenientibus in A, parallelæ, secent quamlibet conicam sectionem, aut duas oppositas Hyperbolas in H, F, K, T, ipsæ autem conveniant in R, sive intra, sive extra sectionem, erit rectangulum HRF ad rectangulum KRT, ut quadratum tangentis MA ad quadratum tangentis AN.*

Ductis per contactus diametris ME, NL, ad quas ordinantur ipsæ FH, TK tangentibus parallelæ, adeoque bifariam secantur in E, L, agatur KO parallela MA, & HS parallela AN, secantes diametros in O, S, quas etiam secant productæ tangentes in G, D, & productæ FH, TK in P, Q. Manifestum est utique, esse Rectangulum HRF, quod est differentia quadratorum HE, RE, ad trapezium

pezium HSQR, quod est differentia similium triangulorum HES, REQ, ut quadratum HE ad triangulum HES, vel ut MA quadratum ad simile triangulum AMD, vel ad ANG ipsi æquale: trapezium autem HSQR, quod æquatur alteri KOPR (*ut in Corollariis Prop.15.* ostensum est), erit ad rectangulum KRT pariter, ut triangulum KLO ad quadratum KL, sive ut triangulum ANG ad quadratum AN; ergo ex æquo rectangulum HRF ad KRT est, ut quadratum MA ad AN quadratum. Quod erat, &c.

COROLL. I. Si duæ æquidistantes chordæ HF, ZX secentur ab alia KT in R, V, erit rectangulum HRF ad ZVX, ut KRT ad KVT; quippe alternatim HRF ad KRT est, ut ZVX ad KVT, nempe ut quadratum tangentis MA, prioribus secantibus parallelæ, ad quadratum AN parallelæ alteri secanti KT.

COROLL. II. Si rectæ HF, KT concurrentes in R sint parallelæ binis aliis XZ, YH convenientibus in I, tam HRF ad KRT, quam XIZ ad YIH erunt in eadem ratione quadrati MA tangentis, ad quadratum tangentis AN; unde permutando HRF ad XIZ erit, ut KRT ad YIH.

COROLL. III. In Parabola eadem rectangula HRF, KRT sunt etiam, ut parametri diametrorum ME, NL, ad quas illæ rectæ ordinantur: nam ex concursu R ducta RB diametris parallela, rectangulum HRF æquatur rectangulo parametri, ad diametrum ME pertinentis, ducti in RB (*ex Prop.11.*), & similiter rectangulum KRT æquatur rectangulo ex ductu parametri pertinentis ad aliam diametrum NL in eandem RB; ergo talia rectangula sunt, ut dictæ Parametri. *Fig.51. 52.*

COROLL. IV. Unde colligitur, Parametros variarum diametrorum Parabolæ esse, ut quadrata tangentium ipsarum vertices, & invicem concurrentium

rentium; nempe ut MA quadratum ad AN quadratum, ita latus rectum diametri ME ad latus rectum alterius diametri NL.

COROLL. V. In Ellipsi verò, & Hyperbola tangentium quadrata sunt in ratione composita diametrorum ductarum ex contactibus,& ipsarum parametrorum illis respondentium; adeoque sunt, ut quadrata semidiametrorum conjugatarum, quæ ipsis tangentibus sunt parallelæ; ideoque in hac ratione pariter sunt rectangula ex partibus secantium has sectiones, dictis tangentibus parallelarum: Id quod in Ellipsi patet, quia per centrum ipsum ductis parallelis tangentibus, eorum rectangula erunt dictarum semidiametrorum, quæ ordinatis ad transversas diametros æquidistant,ideoque sunt conjugatæ ipsis transversis, quadrata, ipsis tangentium parallelarum quadratis proportionalia. In Hyperbola autem, æquè ac in Ellipsi, hoc idem demonstrabitur in *Coroll.2.&* 3. sequentis Propositionis.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 58. 59. *Si ad terminos cujusvis diametri Q, N, sectionis Ellipticæ, aut Hyperbolicæ, agantur tangentes QR, NE, quæ erunt parallelæ, utpote ordinatis æquidistantes, & alia tangens MG illas secet in R, E, rectangulum ex QR in NE æquabitur quadrato secundariæ semidiametri CB, priori QN conjugatæ.*

NAm ex proprietate tangentis MG, ordinata ad diametrum MK, erit QG ad GN, ut QK ad KN (*Coroll.12. Prop.9.*); unde QG plus GN in Ellipsi, seu QG minus GN in Hyperbola, erit ad GN, ut QK plus KN in Ellipsi, seu minus KN in Hyperbola, ad KN, & sumtis antecedentium medietatibus, erit CG ad GN, ut CQ ad KN; unde summa antecedentium QG ad summam consequentium KG, erit ut primum antecedens CG ad primum consequens GN: est autem ob similia triangula, QG ad KG, ut QR ad KM, & CG ad GN, ut CL ad NE; ergo sunt in eadem ratione QR, KM, & CL, NE; adeoque rectangulum ex QR in NE æquatur rectangulo KM in CL; idest, ducta MH parallela CN, quæ ex semidiametro CB secabit CH æqualem KM, erit QR in NE æquale LCH: sed rectangulo LCH æquatur semidiametri CB quadratum; est enim primariæ semidiametri CN quadratum ad semidiametri conjugatæ CB quadratum, ut transversa QN ad suam parametrum (*ex dictis Prop.*12. *in fine*), scilicet ut rectangulum CKG, quod æquatur QKN (*Prop.*9.*Coroll.*8.), ad quadratum KM, quod est in ratione composita ex CK ad KM, sive ad CH, & GK ad KM, hoc est CG ad CL, ideoque ut CK in CG ad CL in CH: sed KCG æquatur CN quadrato (*Coroll.*11.*Prop.*9.); ergo LCH est æquale quadrato CB; ideoque etiam QR in NE, quod vidimus æquari LCH, æquatur quadrato conjugatæ semidiametri CB. Quod erat, &c.

COROLL. I. Per contactum M ducta alia diametro MCS, ductaque tangente SA, quæ parallela erit MG, conveniente in A cum alia tangente NE, quæ diametro MS occurret in I, ductaque ex centro CD parallela ME, quæ sit semidiameter secundaria conjugata semidiametro CM, erit pariter rectangulum SA in ME æquale quadrato semidiametri CD, ob eandem rationem.

COROLL. II. Ductis QS, NM, GI, quæ invicem parallelæ erunt (ob æqualitatem triangulorum NEG, MEI, adeoque etiam NGM, NMI, & ob æquales rectas NC, CQ, & MC, CS), erit QG ad GN, ut SI ad IM; unde & QR ad NE, ut SA ad ME; & ideò rectangulum QR in NE ad rectangu-

lum

lum SA in ME erit in duplicata ratione NE ad ME: unde QR in NE ad SA in ME, ideſt quadratum CB ad quadratum CD, erit ut quadratum NE ad quadratum ME.

COROLL. III. Et ideò ſi duæ chordæ, tangentibus NE, ME parallelæ, invicem conveniant, erunt ipſarum rectangula, ut quadrata ſemidiametrorum CB, CD ipſis æquidiſtantium, cum ſint ut quadrata dictarum tangentium.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 60. *In axe Parabolæ NK ponatur NF infra verticem æqualis quartæ parti ſuæ parametri, atque ipſi NF ponatur ſupra verticem æqualis NP, & ducatur PV parallela ordinatis: ducta ex F ad quodlibet curvæ punctum M recta FM, ductaque tangente OMG, ac diametro MX, axi NK parallela, erit angulus XMO æqualis FMG; & ipſa MF erit pariter æqualis quartæ parti parametri ad diametrum MX pertinentis.*

DIcatur autem punctum F *Focus* Parabolæ; & punctum P ejus *ſublimitas*; & recta PV *Linea ſublimitatis.*

Ordinata ad axem MK, erit quadratum MK æquale rectangulo KN in quadruplam NF, quæ eſt parameter axis; ergo quadruplum rectanguli KNF, cum quadrato FK, æquatur quadratis MK, & KF, ideſt FM quadrato: ſed ob NP æqualem NF, quadratum PK eſt pariter æquale quadruplo rectanguli KNF cum quadrato FK (8.*II.Elem.*); ergo quadratum FM æquatur PK quadrato; unde FM æquatur PK, ſive æquatur FG: nam ob NK æqualem NG, & NF æqualem NP, erit FK æqualis PG, adeoque PK æquatur FG. Eſt igitur GFM triangulum æquicrure, adeoque angulus FMG æquatur

MGK,

MGK, five externo parallelarum XMO. Quod erat primò demonstrandum. Et producta diametro MX ad lineam sublimitatis PV in V, erit MV æqualis PK, ideoque æqualis MF; atque ordinata NX, tangenti MG parallela, & ex axis vertice ducta tangente ND, quæ bifariam secabit MG in D, juncta DF, erit DG quadratum æquale rectangulo FGN: cùm sit enim MD æqualis DG, ut KN æquatur NG, sitque MF æqualis GF, & angulus FMD æqualis FGD, etiam reliqui anguli horum triangulorum æquales erunt, adeoque GDF est angulus rectus, quippe æqualis consequenti MDF, ergo GD quadratum æquatur FGN (8. *VI. Elem.*), sive æquatur MF in MX, quia FG æquatur MF, & GN est æqualis MX: at GD quadratum est quarta pars quadrati MG vel XN, quæ ipsius GD sunt duplæ; ergo ordinatæ XN quadratum est quadruplum rectanguli FM in MX; sed æquatur rectangulo suæ parametri in abscissam MX; ergo FM erit quarta pars dictæ parametri: Quod erat &c.

COROLL. I. Cùm ex Catoptrica ita reflectantur radii, ut angulus incidentiæ XMO æquetur angulo reflexionis FMG; patet, omnes radios axi parallelos, ex remotissimo luminoso corpore, velut ex sole descendentes (qui velut paralleli habentur, multò magis, quam directiones gravium ejusdem loci in centrum terræ, ipso sole multò proximius), & in parabolicum speculum MN*m* incidentes, nempe XM, *x m*, *x m* &c., in punctum illud F reflecti debere, adeoque ibidem ex eorum concursu ignem excitari: & ideò punctum illud *Focus* appellatur. *Fig.* 60. 61.

COROLL. II. Vicissim, si lumen aliquod in hoc foco F speculi Parabolici positum fuerit, emittet radios FM, F*m*, F*m*, qui reflexi in lineas MX, *m x*, *m x* axi parallelas extendentur; unde in magna aliqua diſtantia eandem intenſionem ſervabunt, quam habent prope ipſum lumen, veluti in MX: unde charaćteres à lumine remotiſſimi legi poterunt, & diſtantium locorum ſuperficies commodè illuſtrari.

Fig. 60. COROLL. III. Linea FD, conjungens focum ad concurſum tangentis verticalis axis cum alia laterali tangente, eſt huic ipſi tangenti perpendicularis: oſtendimus enim, angulum FDG rećtum eſſe.

COROLL. IV. Etiam MV portio diametri MX à ſuo vertice M ad lineam ſublimitatis PV, eſt quarta pars parametri ſibi correſpondentis: nam FM æqualis FG, æquatur PK, adeoque eſt æqualis MV: & ubilibet dućta *Fm* æquatur axi parallelæ *m u* ad dićtam lineam ſublimitatis extenſæ: unde quælibet FM ad MV eſt, ut FN ad NP.

Fig. 61. COROLL. V. Quælibet XM cum MF æquatur alteri *x m* cum *m* F: æquatur enim XV, ſive TP, propter MV æqualem MF.

Fig. 62. COROLL. VI. Sumtis in perimetro Parabolæ, hinc inde ab axe, binis punćtis M, B (aut ex eadem parte M, *b*), & junćtis ad focum F rećtis MF, BF (ſeu *b*F), dućtiſque tangentibus MG, BH convenientibus in L (aut MG, *b h*, concurrentibus in *l*) erit angulus MFB duplus contenti à tangentibus GLB (ſive MF*b* duplus G *l b*). Nam quia oſtenſum eſt æquicrure triangulum MFG, aut BFH (vel *b* F *h*), externus angulus KFB duplus eſt interni FHB (& KF*b* duplus F *h b*), nec non MFK duplus MGF; unde KFB plus MFK, ſcilicet MFB, æquatur duplo FHB cum duplo MGF, ſive HGL, quibus æquatur duplum GLB (at KF*b*, minus MFK, ſcilicet MF *b*, æquatur duplo F *h b*, minus duplo MGF, ſive *h* G *l*, quibus æquale eſt duplum G *l b*): quare angulus ex

ramis

ramis ad focum ductis MFB, aut MF*b*, duplus est anguli à tangentibus contenti GLB, aut G*l b*.

COROLL. VII. Quod si puncta M, B sint in eadem recta linea cum foco F, tangentes ML, BL in angulum rectum MLB convenient; eo quod anguli BFK, & KFM sint duobus rectis æquales, & eorum medietas sit angulus ille MLB à tangentibus comprehensus. *Fig.63.*

COROLL. VIII. Hinc ipsa recta MB erit parameter diametri LSR, bifariam secantis MB illi ordinatam. Circulus quippe triangulo MBL circumscriptus habebit centrum in R, quia rectus angulus L erit in semicirculo; quare MB erit dupla radii RL, & RL est dupla RS, sive (ducta tangente SH parallela MB) est dupla FH, cui æquatur FS, uti ostensa fuit FM æqualis FG: ergo MB est quadrupla FS: sed hæc est quarta pars parametri ad diametrum SR pertinentis; ergo ipsa MB est ejus parameter.

COROLL. IX. Juncta LF erit quoque perpendicularis MB: cùm enim ostensæ sint æquales LS, SR, FS, angulus LFR erit rectus, quippe in semicirculo circa diametrum LR descripto; & ideo quadratum LF æquatur rectangulo MFB.

COROLL. X. Ipse autem rectus angulus MLB, à tangentibus comprehensus, est in recta PV sublimitatis ejusdem parabolæ, quia FS æquatur SL, ut FN æquatur NP; unde punctum L ad rectam PV pertinet, cujus est talis proprietas.

PROPOSITIO XX.

In axe transverso Ellipsis, & Hyperbolarum oppositarum, determinatis rectangulis QFN, NFQ æqualibus quadrato semiaxis secundarii conjugati CB, seu quartæ parti rectanguli per trasversum QN, & per latus rectum NS comprehen- *Fig.64. 65.*

si, ad quodlibet punctum Curuæ M junctis rectis FM, VM ex utroque puncto F, V, comprehendent cum tangente GME angulos æquales. Vocentur hæc duo puncta F, V Foci *dictarum sectionum.*

Verticales axis tangentes QE, NO conveniant cum alia tangente MG ad puncta E, O; ergo rectangulum ex QE in NO, quod æquatur quadrato CB (*ex prop.19.*), æquabitur rectangulo QFN, aut NVQ; ideoque erit EQ ad QF, ut FN ad NO; & EQ ad QV, ut VN ad NO: unde junctis EV, OV, & EF, FO erunt triangula EQV, OVN similia; item EQF, ONF similia erunt; quare angulus EVQ æquabitur NOV: & quia NOV, cum NVO complet unum rectum (existente recto angulo ONV in eodem triangulo), erit EVQ cum NVO recto æqualis; ideoque OVE rectus angulus erit. Similiter ob angulum QFE æqualem NOF, qui cum NFO rectum complet, etiam angulus EFO est rectus: unde semicirculus super diametro EO descriptus per puncta V, F transibit, rectos angulos EVO, EFO comprehendens: & per punctum O ducta AO parallela VE, quam secet in I recta VM, erit angulus AOV rectus, utpote alterno parallelarum EVO æqualis: estque AO æqualis OI, quia ordinata MK, cum sit QG ad GN, ut QK ad KN (*Corell.13.Prop.9.*), erit etiam EG ad GO, ut EM ad MO, quare & EV ad OA, ut EV ad IO; unde OA æquatur IO: Angulus ergo OVI æquabitur OVA in triangulis OVI, OVA æqualibus & similibus: sed OVA æquatur angulo OEF, quippe eidem arcui OF insistunt in eodem circulo; quare & angulus OVI æquabitur OEF: & ex puncto H, ubi concurrunt VO, EF, juncta ad M linea HM erit tangenti EM perpendicularis, quia ob æquales angulos HVM, HEM, circulus per puncta H, V, H, V, E, M describi posset, existente angulo HME recto, quia oppositus est angulo recto HVE; unde & rectus erit HMO: qui cum opponatur alteri recto HFO, etiam per puncta M,H,F,O transire poterit circulus; quare angulus VMB æquabitur VHE, & angulus FMO æquabitur FHO, cùm sint in eodem circulari segmento: sed VHE est æqualis (aut idem) cum FHO; ergo anguli VME, FMO, quos rami, ex Focis V, F ad idem sectionis punctum M ducti, cum tangente comprehendunt, sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Hinc radii ex puncto V in perimetrum sectionis Ellipticæ, aut Hyperbolicæ NM incidentes, reflectuntur ad aliud punctum F in Ellipsi; aut in Hyperbola ita reflectentur in R, ut in ipsum punctum F sint collimantes, ob angulum reflexionis RMY æqualem angulo incidentiæ VME, adeoque æqualem angulo OMF, ipsi ad verticem opposito. Et vicissim, ex puncto F in sectionem MN incidentes radii, reflectentur in alterum focum V in Ellipsi: at in Hyperbola, ob angulum ZMY æqualem verticaliter opposito VME, adeoque & angulo incidentiæ FMO, reflectetur FM in MZ, quæ collimat in punctum V. Et ideò hæc puncta Foci appellantur, quippe luminis in uno ipsorum potiti reflexi radii ab Elliptica curva in aliud reflexi colligentur; & in Hyperbolica reflexi radii luminis irradiantis ex uno foco imaginem referent in altero. Idem de objectis per specula Elliptica, aut Hyperbolica videndis intelligi debet.

COROLL. II. Determinari poterunt foci Ellipsis, aut Hyperbolæ, si super quamlibet tangentem OE, verticalibus tangentibus NO, QE interceptam, velut diametrum circulus describatur, axem secans in F, & V, quæ puncta erunt Foci quæsiti, propter angulos in semicirculo rectos OVE, OFE.

COROLL. III. Item, si ex vertice B secundarii axis inclinentur hinc inde in Ellipsi super axem transversum rectæ BF, & BV, singulæ æquales semiaxi transverso CN, seu CQ, erunt puncta F, V ipsi Foci: tunc enim rectangulum NFQ, aut QVN, cum quadrato CF, seu CV, adæquans quadratum CN, vel BF, aut BV, idest quadratum BC cum quadrato CF, aut CV, dabit ipsum rectangulum NFQ, aut QVN dicti semiaxis secundarii BC quadrato æquale, ut contingit in Focorum determinatione.

COROLL. IV. In Hyperbola si rectæ BN, jungenti terminos utriusque axis, æqualis ponatur ex centro CF, aut CV in axe transverso, erunt puncta F, V foci quæsiti: nam rectangulum QFN, quod cum quadrato CN complet quadratum CF, æquabitur quadrato CB, quod cum eodem CN quadrato complet quadratum BN.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 66. 67. *Si cuilibet ramo FM, ex foco F ad aliquod punctum M Ellipseos, aut Hyperbolæ ducto, agatur ex centro C parallela CI, cum tangente ME conveniens in I, erit CI æqualis semiaxi transverso CQ aut CN.*

Ducta ex alio foco V recta VD pararella iisdem FM, CI, & tangenti occurrente in D, & juncta VM, quam secat CI in T, ductisque verticalibus tangentibus QE, NO. Quoniam angulus VME (*per prop. præc.*) æquatur FMO, sive VDM ob parallelas huic æquali, erunt latera VM, VD æqualia, ut pote angulis æqualibus opposita: estque MI ad ID, ut MT ad TV, ut FC

ad

ad CV, quæ sunt æquales; ergo triangulorum MVI, DVI, latus commune VI habentium, cætera latera MV, VD, necnon MI, ID æqualia sunt; unde & anguli MIV, DIV æquales erunt, adeoque recti: & quia pariter recti sunt VQE, VNO, circulus circa diametrum VE descriptus, per puncta Q, I transibit; & circulus circa diametrum VO, per puncta N, I pariter se conferet. Quare angulus QIV æquabitur QEV, quippe ad idem circuli segmentum pertinebunt: Sed QEV æquatur OVN (ut, *Prop. præc.* ostensum est), qui pariter æqualis erit NIO, cum in eodem circuli segmento, per puncta N, I, V, O transeuntis, uterque consistat; ergo angulus QIV æquatur NIO: & si alteruter addatur angulo NIV in Ellipsi, vel ab ipso subtrahatur in Hyberbola, fiet angulus QIN æqualis recto VIO. Quare circulus super diametro QN descriptus per punctum I transibit, eritque radius CI æqualis semiaxi CQ, aut CN. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Hinc habetur, quod in Ellipsi summa inclinatarum ex focis ad quodlibet punctum curvæ, & earum differentia in Hyperbola, æquatur integro axi QN. Nam quia FV est dupla VC, erit FM dupla CT; & cum sit quoque DM dupla MI, erit VD, sive ipsi æqualis VM dupla TI: quare FM, & VM in Ellipsi est dupla CT, cum TI, hoc est dupla CI vel CQ; adeoque æqualis QN. In Hyperbola verò differentia VM ab MF est dupla differentiæ TI à CT, hoc est dupla CI, seu CQ, & propterea æqualis axi transverso QN.

COROLL. II. Rursus si per centrum C agatur tangenti parallela CP, utrumque ramum secans in P, R, erunt MP, MR eidem semiaxi CN æquales. Nam in parallelogrammo CIMP est utique MP æqualis CI: & ducta etiam CS parallela ramo VM, resultabit quoque CS æqualis semiaxi;

& in parallelogrammo RCSM erit quoque CS æqualis MR; unde utraque MP, aut MR, æquatur semiaxi CN.

COROLL. III. Quoniam ostensa est CI, aut CS æqualis CN, & juncta VI fit perpendicularis tangenti, quemadmodum eidem foret perpendicularis FS; colligitur, quod si circa diametrum QN circulus describatur, ad quem terminabunt illæ lineæ CI, CS æquales CN, ejusque peripheria secetur à qualibet tangente MG in punctis I, S, junctæ CI, CS evadent parallelæ ramis ad contactum ductis FM, VM, utpote æquales semiaxi (nec enim tales parallelæ possunt occurrere tangenti extra peripheriam circuli, quia aliàs non forent æquales semiaxi), & factis angulis rectis GIV, GSF, illæ perpendiculares IV, SF ad focos in axe determinandos se extendent: unde patet modus alius determinandi focos harum sectionum.

COROLL. IV. Ductæ ex focis F, V in aliquam tangentem GM perpendiculares FS, VI continent rectangulum æquale quadrato semiaxis secundarii CB, nempe rectangulo NFQ, aut NO in QE. Nam extensa SF ad circulum in X, juncta XC erit in directum alteri radio CI; nam ob angulum rectum ISX, est arcus XSI semiperipheria æqualis semiperipheriæ QIN; & ablato communi NI, est arcus XN æqualis QI, & angulus XCN æqualis QCI; circa quos angulos, cùm latera XC, CF lateribus CI, CV sint æqualia, & basis FX æquatur basi VI, unde rectangulum FS in VI æquatur rectangulo SFX, adeoque etiam rectangulo NFQ.

COROLL. V. Ducta ad tangentem perpendiculari MH, erit harmonicè sectus axis ab utroque foco, à perpendiculari, & tangente; nempe erit FH ad HV, ut FG ad GV. Nam concurrente FS cum MV in Z, ob angulos rectos FSM, MSZ æqua-

æquales, atque FMS, SMZ (qui æquatur, VME) pariter æquales, lateri MS communi triangulorum MSF, MSZ adjacentes, erunt & latera FS, SZ æqualia: unde FS ad VI est, ut SZ ad VI; sed prima ratio eadem est cum ratione FG ad GV, secunda cum altera SM ad MI, sive FH ad HV; ergo est FG ad GV, ut FH ad HV.

COROLL. VI. Quadrata autem FS, VI, & IS erunt semper eidem quantitati æqualia, nempe quadratis NV, & VQ, sive NF, & FQ. Nam juncta FI, erunt quadrata FS, SI æqualia quadrato FI; ergo addito VI quadrato, sunt quadrata FS, VI, & IS quadratis VI, & IF æqualia: hæc autem ex supradictis (*Schol. primo num*, 5.) sunt æqualia duplo quadrati IC bissecantis basim VF trianguli VIF, cum duplo semibasis CV; & duplum quadrati CI, sive CQ unà cum duplo CV quadrati æquætur binis quadratis inæqualium partium VQ, FQ, sive VQ, VN, aut ipsis NF, NV, sive NF, FQ quadratis (*Prop.* 9. & 10. 11. *Elem.*); ergo quadrata FS, VI, & IS, hisce quadratis æquantur, ideoque sunt semper ejusdem quantitatis.

PROPOSITIO XXII.

In Hyperbola summa angulorum MFB, MVB, quos rectæ ex utroque foco ad bina curvæ puncta inclinatæ, continent; in Ellipsi verò eorum differentia dupla est anguli MEB à tangentibus eorundem punctorum comprehensi. Fig. 68. 69.

ANgulus enim MFK externus æquatur internis angulis MVF, FMV; ergo MFK cum MVF æquatur duplo MVF cum ipso FMV, qui pariter duplus est anguli VMG; ergo MFK cum MVF duplus evadit anguli MGF, qui æquatur ipsis MVF, VMG. Eodem modo probabitur angulus

gulus BFK, cum BVF duplus anguli BHF: quare totus angulus MFB, cum toto MVB æquabitur duplo anguli MGF, sive HGL, cum duplo BHF, sive GHL, quibus æquatur duplus anguli externi MLB, à tangentibus comprehensi. In Ellipsi verò; quia angulus GMF, sive VMI, æquatur MGV cum MVF; ergo addito utrinque MGV, erunt anguli GMF, MGV, ideſt externus MFV, æquales MVF cum duplo MGV: eodemque modo externus BFV æquabitur BVF cum duplo BHF, sive duplo LHG: quare totus angulus MFB æquatur toti MVB cum duplo MLB, qui ipsis MGV,& LHG æquatur: Igitur excessus anguli MFB supra MVB eſt æqualis duplo anguli MLB, à tangentibus comprehensi; &c.

COROLL. Recta MFT per focum traducta, & ductis tangentibus ME, TE convenientibus in E, erit angulus MET in Hyperbola semper obtusus, in Ellipsi semper acutus: nam anguli à ramis MF, TF ad focum F directè convenientibus contenti, sunt duobus rectis æquales; unde medietas anguli MFT eſt rectus, quare ejus summa cum medietate anguli MVT major eſt recto, ejusque excessus supra medietatem MVT eſt minor recto: quare angulus MET æqualis summæ ex dimidio MFT, & dimidio MVT erit in Hyperbola obtusus; & in Ellipsi cum sit MET æqualis differentiæ dictarum medietatum, erit acutus.

PROPOSITIO XXIII.

Fig.70. & 71. *Distantia focorum FV eſt media proportionalis inter latus transversum QN, & QG summam transversi, & recti NH in Hyperbola, eorumve differentiam in Ellipsi.*

QVia enim rectangulum QFN æquatur quadrato semiaxis conjugati CB, sive quartæ parti

parti rectanguli ex transverso & recto QNH, seu QNG, posita NG æquali NH; utrovis addito in Hyperbola, & subtracto in Ellipsi, ad semiaxis transversi CN quadratum, resultat CF quadratum æquale aggregato quadrati CN, & quartæ partis QNG in Hyperbola, eorumque differentiæ in Ellipsi: & quadruplicando terminos, erit quadratum distantiæ focorum FV æquale summæ quadrati QN, & rectanguli QNG in Hyperbola, idest rectangulo NQG; in Ellipsi autem eorundem differentiæ, quæ pariter est NQG rectangulum. Ergo VF distantia focorum est media proportionalis inter axem transversum QN, & QG, quæ summa est in Hyperbola, in Ellipsi verò differentia ejusdem transversi lateris QN à recto NH, seu NG. Quod erat &c.

COROLL. Quoniam quadratum axis conjugati AB æquatur rectangulo QNH, sive QNG, & quadratum distantiæ focorum FV æquale ostensum est rectangulo NQG; erit quadratum AB ad quadratum VF, ut QNG ad NQG, ideft ut rectum latus NG ad QG summam transversi lateris, & recti in Hyperbola, & eorum differentiam in Ellipsi: eodemque modo erit quoque quadratum semiaxis conjugati CB ad quadratum distantiæ foci à centro CF, aut CV.

PROPOSITIO XXIV.

In Hyperbola, & Ellipsi ex quolibet puncto R ducta tangente RG concurrente cum binis diametris conjugatis CN, CA in punctis G, M, erit rectangulum GRM æquale quartæ parti rectanguli ex transversa diametro RCS, per contactum ducta, in ejus parametrum, sive æquale quadrato semidiametri CH parallelæ tangenti, quæ est conjugata ad diametrum RCS. Fig. 72. 73.

Du-

DUcatur etiam tangens HK eidem Ellipsi, vel ad conjugatam Hyperbolam, & ordinentur HF, RE ad diametrum AB, item HI, RO ad NQ, necnon AL ad CH, & AD ad CR. Cùm sit CH ad CL, ut CK ad CA, sive ut CA ad CF (*ex Coroll.* 11. *Prop.* 9.), erit triangulum HCF æquale ACL; unde etiam HCI æquabitur ADC. Similiter autem erit RC ad CD, ut MC ad CA, sive ut CA ad CE, & triangulum ADC æquabitur RCE, vel RCO: ergo triangula HCI, RCO æquantur; estque GOR ad RCO, ut GO ad OC, hoc est ut GR ad RM sive ut CE ad EM, aut ut triangulum REC ad RME; ergo GRO triangulum ad HCI æquale RCO erit, ut idem CHI, quod æquatur RCE sive ADC, ad RME: suntque GRO, HCI, RME triangula similia, quorum homologa latera GR, CH, RM erunt proportionalia: ideoque rectangulum GRM æquatur quadrato semidiametri CH, seu quartæ parti rectanguli ex diametro transversa RS in suum latus rectum. Quod erat, &c.

COROLL. I. Circulo circa triangulum CMG circumscripto, cujus circumferentiam secet CR in P, erit PR medietas lateris recti ad diametrum RCS pertinentis: quia rectangulum GRM æquabitur CRP rectangulo, unde CRP erit quarta pars rectanguli ex RCS in suum latus rectum, adeoque ex semidiametro RC in medietatem recti lateris, quæ erit PR.

COROLL. II. Si circulus hic in figura Hyperbolica non secaret, sed tangeret semidiametrum CR, coincidente puncto P cum C, unde PR æqualis esset CR; foret Hyperbola æquilatera, ob medietatem lateris recti æqualem medietati transversæ diametri.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Inclinatæ ex focis F, V ad quodvis punctum R curvæ Ellipticæ, aut Hyperbolicæ, continent rectangulum VRF æquale quadrato semidiametri CH conjugatæ diametro RCS per punctum R ductæ, sive quartæ parti rectanguli sub transverso RS, & ejus recto latere contenti. Fig. 74. 75.

Ducta enim tangente RG concurrente cum axe NQ in G, & cum axe altero conjugato AB in M; ductaque ex centro CI parallela VR, in I, juncta IF erit ipsi tangenti perpendicularis (*Coroll.* 3. *Prop.* 21.): quare ob angulos rectos MIF, MCF, transiret circulus per puncta M, I, F, C, super diametro FM descriptus: adeoque rectangula FGC, IGM erunt æqualia; unde FG ad GM erit, ut IG ad GC, sive ut RG ad GV, ob parallelas CI, VR; ergo FGV æquabitur MGR; unde etiam per puncta V, R, M, F, transire poterit circulus, unde angulus FMR æquabitur GVR (essent enim *Fig.* 75. in eodem segmento, & *Fig.* 74. uterque cum FVR, illi opposito, huic consequenti, duos rectos compleret): sed & angulus FRM æquatur VRG (*Prop.* 20.); ergo triangula FMR, GVR æquiangula sunt, & similia; ideoque FR ad RM erit ut GR ad RV; & rectangulum VRF æquabitur GRM: sed hoc (*ex Prop. præced.*) æquatur quadrato semidiametri conjugatæ CH, quæ tangenti æquidistat, seu quartæ parti figuræ ex tranverso RS, & ejus parametro contentæ; ergo etiam illud rectangulum VRF ipsi æquatur. Quod erat, &c.

COROLL. I. Hinc VR est ad semidiametrum RC, ut medietas parametri ad hanc diametrum pertinentis, ad RF, quia rectangulum VRF æquatur RC in semiparametrum; id enim est

est quarta pars rectanguli totius diametri RS in totam parametrum.

COROLL. II. Ex terminis diametri RS junctæ ad focum RF, SF pariter continebunt rectangulum RFS æquale quadrato semidiametri conjugatæ CH, seu quartæ parti figuræ rectanguli ex ipsa diametro RS in suam parametrum: quippe FS æquatur VR, cum sint bases triangulorum FCS, RCV æqualia latera FC, CV, & SC, CR circa æquales angulos ad verticem C habentium; unde RFS æquatur VRF.

COROLL. III. Quadrata RF, & RV cum duplo quadrato conjugatæ semidiametri CH, æquantur quadrato QN in Ellipsi; in Hyperbola vero eadem quadrata RF, & RV, demto duplo quadrato semidiametri conjugatæ CH, eidem quadrato axis QN æquantur. Nam QN æquatur aggregato ipsarum RF, & RV in Ellipsi; in Hyperbola verò æquatur earundem differentiæ (*Coroll.2.Prop.21.*); ergo quadratum QN æquatur ipsarum quadratis, addito in Ellipsi, & demto in Hyperbola, duplici rectangulo ipsarum, quod idem est, ac duplum quadratum CH.

COROLL. IV. Rursus in Ellipsi summa ex rectangulo quolibet VRF & ex quadrato suæ semidiametri transversæ CR, in Hyperbola vero eorum differentia, semper ejusdem est quantitatis, nempe æquatur duplo quadrato semiaxis transversi CN, ablato quadrato distantiæ foci à centro CV, vel CF. Nam vidimus esse QN quadratum æquale quadrato summæ in Ellipsi, vel differentiæ in Hyperbola, rectarum VR, FR, idest quadratis VR, & FR plus, vel minus duplo rectangulo VRF; At quadrata VR, & FR dupla sunt quadrati CR, & quadrati CV (ex dictis *in Scholio num.5.*); ergo duplum quadrati CR, cum duplo quadrati CV, plus aut minus duplo rectangulo VRF, æquatur

qua-

quadrato QN; & omnia dimidiando, quadratum CR cum quadrato CV, addito, aut demto rectangulo VRF, æquatur dimidio quadrati QN, quod est duplum quadrati semiaxis CN: quare hinc inde ablato quadrato CV, erit summa vel differentia quadrati CR, & rectanguli VRF, æqualis differentiæ dupli quadrati CN ab ipso CV, vel CF quadrato.

COROLL. V. Et quia rectangulum VRF æquatur quadrato conjugatæ semidiametri CH, erit in Ellipsi summa quadratorum CR, & CH, in Hyperbola verò eorum differentia, æqualis summæ, aut differentiæ quadratorum ex utroque semiaxe CN, & CB. Nam pariter summa, aut differentia quadratorum CR, CH æquabitur duplo CN quadrati, demto quadrato CV: sed quadratum CN, dempto CV in Ellipsi æquatur rectangulo QVN, seu quadrato semiaxis CB; & in Hyperbola CV quadratum demto QVN, seu CB quadrato, æquatur quadrato CN; ergo in Ellipsi CR quadratum cum CH quadrato æquatur quadratis CN, & CB; in Hyperbola verò differentia quadratorum CR, & CH, æquabitur differentiæ quadratorum CN, & CB.

COROLL. VI. Hinc quadruplicatis terminis axium QN, & AB quadrata simul sumta in Ellipsi æquantur quadratis quorumlibet conjugatorum diametrorum RS, & HT; & in Hyperbola quadratorum ex axibus differentia æqualis erit differentiæ quorumvis quadratorum ex diametris conjugatis.

COROLL. VII. Unde Hyperbola æquilatera, cujus axis transversus æquatur axi conjugato, & habet parametrum consequenter sibi æqualem (ob proportionalitatem harum trium linearum), habebit quaslibet alias transversas diametros suis conjugatis æquales, cum parametris iisdem æqualibus,

ibus: nam ubi æqualis est differentia quadratorum ex axibus, & ex binis conjugatis diametris, si in illis est nulla, pariter in his nulla esse potest.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 76, 77. *In Ellipsi, & Hyperbola qualibet diameter HT est media proportionalis inter axem transversum NQ, & rectam ipsi HT parallelam RS per aliquem focum F traductam.*

Ducta enim tangente RG, & ex alio foco V iisdem HT, RS parallela VD, jungatur RD, quæ bifariam secabitur in E à diametro HT, cui est ordinata, sicut FV bifariam divisa est in centro C ab eadem diametro ipsis FR, VD parallela; erit ergo CE media arithmetica inter ipsas FR, VD, sive inter FR, & FS, quæ ipsi VD æquatur, nam in pari a centro distantia utraque ad curvam inclinatur æquali angulo NFS aut RFQ, & QVD; quare dupla CE, quæ est media, æquatur summæ extremarum RS: at CH est media geometrica inter CE, & CG (*Coroll.* 11. *Prop.* 9.); ipsaque CG parallela FR, æquatur semiaxi transverso CN (*Prop.* 21.); ergo sunt quoque proportionales RS dupla CE, HT dupla CH, & QN dupla CG; Unde patet propositum.

COROLL. I. Quadratum igitur diametri HT æquatur rectangulo ex recta ipsi parallela RS per focum ducta, & ex axe transverso QN.

COROLL. II. Unde si plures lineæ per focum traducantur, erunt singulæ, ut quadrata diametrorum, ipsis æquidistantium.

COROLL. III. Est SR ad MA latus rectum suæ diametri MK, cui ordinatur, ut ipsa diameter MK ad axem transversum NQ: nam HT quadratum æquatur AMK; sed & æquatur RS in QN; ergo

ergo AMK eſt æquale RS in QN, & ideò eſt RS ad AM, ut MK ad QN.

COROLL. IV. Cum RS a diametro MK bifariam ſecta ſit in O, erit OR quadratum ad quadratum HC, ut rectangulum KOM ad quadratum MC; & cum ſint RS, HT, NQ proportionales, adeoque & earum dimidiæ OR, CH, CN, erit OR quadratum ad quadratum CH, ut CH quadratum ad quadratum CN; ideoque rectangulum KOM ad quadratum MC, ut quadratum HC ſive ut rectangulum VMF huic æquale (*ex prop. præc.*) ad quadratum CN.

COROLL. V. Et permutando erunt rectangula KOM, VMF, ut quadrata ſemidiametri CM, & ſemiaxis CN, ſive ut integrorum MK, NQ quadrata.

COROLL. VI. Rectangula NFQ, SFR, cùm ſint, ut QN quadratum ad HT quadratum (*ex cor. 3. prop. 18.*), erunt ut QN, SR (*ex Coroll. 2. hujus*); & ſemper rectangula ex portionibus linearum per focos trajectarum, erunt ut ipſæmet integræ lineæ.

COROLL. VII. FM erit ad quartam partem parametri MA pertinentis ad diametrum MK, ut eadem diameter MK ad aliam MV ex altero foco inclinatam; quippe VMF æquale CH quadrato, æquatur MK in quartam partem ſui parametri.

PROPOSITIO XXVII.

Summa inclinatarum ex focis ad idem punctum hyperbolæ, earumque differentia in Ellipſi, nempe FR, plus, aut minus VR eſt ad CO diſtantiam ordinatæ RO à centro, ut focorum diſtantia VF ad ſemiaxem tranſverſum CN. Fig. 78. & 79.

Nam tangenti TRG ductis ex foco F, & ex centro C parallelis FH, CM, concurrenti-

 bus

bus cum VR in H, M, ductaque CI parallela VR, atque ordinata ad axem RO; ob angulos FRI, VRT æquales, etiam RFH, RHF æquales erunt; quare HR æquatur RF: unde VH erit summa in hyperbola, & differentia in Ellipsi, dictarum inclinatarum FR, VR; est que VH ad VF, ut VR ad VG, sive ut CI æqualis CN, ad CG, vel ut CO ad CN (quia CO, CN, CG sunt proportionales); ergo VH ad VF est, ut CO ad CN, & permutando, VH summa, vel differentia inclinatarum à focis, est ad CO distantiam ordinatæ RO à centro, ut distantia focorum VF ad semiaxem CN. Quod erat, &c.

COROLL. I. Hinc summæ, aut differentiæ, inclinatarum ex focis ad varia puncta curvæ hyperbolicæ, aut Ellipticæ, sunt ut distantiæ ordinatarum à centro, cum sint illæ ad has distantias in eadem constanti ratione VF ad CN.

COROLL. II. Unde si inclinandæ sint ex focis ad diversa curvæ hyperbolicæ, aut Ellipticæ puncta, lineæ, quarum summæ, aut differentiæ sint in aliqua data ratione, acceptis in tali ratione distantiis à centro, & ordinatis ad axem rectis, inclinatæ ex focis ad harum ordinatarum terminos, satisfacient quæsito.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 80. 81. 82. *In omni sectione Conica ordinata ex foco ad axem FM, ductisque tangentibus MG, NO, erit ipsa FM medietas lateris recti, & NO æqualis NF.*

Esto NX latus rectum, erit in Parabola NF ejus quadrans, estque FM media proportionalis inter abscissam FN, & ipsum NX, propter MF quadratum æquale FNX; ergo FM est medietas ejusdem parametri NX; nam inter 4. & 1. mediat

mediat 2. Quia verò etiam GF dupla est FN, est utique GF æqualis FM, quæ ejusdem FN est dupla, & NG æqualis NO: unde NF æqualis GN, æquatur NO.

In aliis autem sectionibus rectangulum QFN ad quadratum MF est, ut transversum latus QN ad rectum NX, sive ut QNX rectangulum ad NX quadratum; & permutando QFN ad QNX, ut quadratum MF ad NX quadratum; sed primum est quarta pars secundi, ergo & tertium est quarta pars quarti; adeoque MF est medietas NX, ut illius quadratum sit quarta pars hujus. Quia verò QFN est pars quarta QNX, æquabitur rectangulo ex medietate transversi, nempe CN in parametri medietatem MF: quare cum sit QFN æquale etiam rectangulo CFG (*ex Coroll.9.prop.9.*); erit CN in MF æquale ipsi CFG; unde CF ad CN (sive CN ad CG) erit ut MF ad FG, scilicet ut ON ad NG; sed etiam FN ad NG est in eadem ratione CF ad CN, aut CN ad CG, quia dividendo etiam terminorum differentiæ sunt, ut ipsi termini proportionales, ergo ON est æqualis FN, cum ad NG utraque habeat eandem rationem; Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. In Parabola GF æquatur FM; in aliis autem sectionibus inæqualis est, in ratione tamen GN ad NO, sive ad NF huic æqualem; estque GN ad NF, ut GQ ad QF (*Coroll.12.Prop.9.*), quia secatur harmonicè diameter ab ordinatæ, & tangentis occursu cum suis terminis: ergo GF ad FM est etiam ut GQ ad QF.

COROLL. II. Et quia in hyperbola GQ est minor QF, in Ellipsi verò illa major ista, ideò GF semper minor est in hyperbola ordinata FM, in Ellipsi verò major.

COROLL. III. Juncta FO, erit angulus NFO semirectus, ob latus NF æquale ipsi NO.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 80. 81. 82. *Iisdem positis, ordinata ad axem quamvis alia TBH, secante tangentem GM in A, juncta ex foco ad curvam recta FH erit aequalis BA.*

Rectangulum enim TAH ad quadratum tangentis AM est, ut quadratum NO ad quadratum OM (*ex Prop.* 16.); sed NO aequatur NF (*ex praeced. prop.*); ergo est etiam, ut quadratum NF ad quadratum OM, vel ut quadratum FB ad quadratum AM, ita rectangulum TAH ad idem quadratum AM; quare illud rectangulum aequatur FB quadrato; & utrinque addito quadrato BH, erit TAH rectangulum, cum quadrato BH aequale utrique simul sumpto quadrato FB, & BH; idest quadratum BA aequabitur quadrato FH: ergo ramus ex Foco FH aequatur ipsi BA ordinatae, ad tangentem GM extensae; Quod erat, &c.

COROLL. I. Hinc constat rectangula TAH, ex ordinatis axi, ad tangentem GM protensis, in earum partem externam, aequari quadrato BF, distantiae foci ab ordinata.

COROLL. II. Hinc qualibet sectio conica describi poterit, si in triangulo rectangulo GFM productis lateribus GF, GM, & ductis quibuslibet ordinatis BA, *b a* ipsi FM parallelis, ex fixo puncto F ad ipsas inclinentur FH, F*h* dictis ordinatis aequales; erunt enim puncta H, *h* ad Parabolam, si latus GF sit aequale FM; ad Ellipsim autem si GF sit majus FM; ad Hyperbolam verò (& etiam ad ejus oppositam), si GF minus FM.

COROLL. III. Ubi tangens MG ex termino ordinatae ex foco FM ducta, concurrit cum axe, si agatur GPK parallela ordinatis dicetur haec quoque in Ellipsi, & Hyperbola, (ut in Parabola indicadicavimus *prop.* 19.) *Linea sublimitatis*, ad quam ex quovis curvæ puncto H ducta HK axi parallela, uti etiam MP, erit semper ramus FH ex foco ad quodlibet punctum H ductus, ad ipsam HK, ut FM ad MP, sive ut FN, aut NO ipsi æqualis, ad NG: quippe in eadem ratione est etiam AB ad BO, adeoque & FH ad HK, cùm sint illis æquales. *Fig.* 83.

COROLL. IV. Quin etiam, si ex foco ad lineam sublimitatis ducatur quælibet inclinata linea FHS, ductoque alio ramo FL agatur ipsi FS parallela LR ad eandem sublimitatis lineam terminata, in qualibet sectione, erit FH ad HS, ut FL ad LR; ductis enim axi parallelis HK, LP, cùm sit FH ad HK, ut FL ad LP, & ob similia triangula KHS, PLR, sit HK ad HS, ut LP ad LR, erit ex æquo FH ad HS, ut FL ad LR.

PROPOSITIO XXX.

Si ex contactu Hyperbolæ, aut Ellipsis, ducatur tangenti perpendicularis MP ad axem transversum terminata, & ex centro C in eandem tangentem agatur perpendicularis CS, rectangulum ex PM in CS æquabitur quadrato semiaxis conjugati CA, seu quartæ parti figuræ rectanguli ex transverso latere in suum rectum. *Fig.* 84. 85.

ORdinentur ad utrumque axem MK, MR. Similia erunt triangula HCS, PMK: ob æquidistantia enim latera SC, MP, angulus MPK æquatur SCP, adeoque & CHS; quia utervis cum HCS rectum complet, suntque anguli recti MKP, HSC pariter æquales: igitur est MP ad MK, ut CH ad CS; quare PM in CS æquatur CH in MK, sive in CR illi æqualem: at HCR æquatur CA quadrato (*Coroll.* 11. *Prop.* 9.); ergo pariter PM in CS eidem quadrato minoris semiaxis æquatur, seu quartæ parti rectanguli ex axe transverso in suam parametrum. Quod erat &c.

COROLL. I. Quoniam etiam rectangulum ex verticalibus tangentibus QE, NO, eidem quadrato minoris semiaxis æquatur, etiam huic æquale erit rectangulum ex PM in CS; unde QE ad CS erit, ut PM ad NO.

COROLL. II. Et ob similitudinem triangulorum EGQ, CGS, PGM, OGN, cùm sit QG ad QE, ut GS ad CS, ut GM ad MP, ut GN ad NO; sintque consequentes proportionales, etiam antecedentes proportionales erunt, nempe QG ad GS, ut GM ad GN: unde rectangula QGN, MGS erunt æqualia.

COROLL. III. Similiter, & reliqua latera EG, CG, GP, GO proportionalia erunt; adeoque rectangulum FGO æquabitur CGP.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 86. *Si ex quolibet puncto M cujusvis sectionis conicæ ducta ad tangentem ME perpendicularis MP, cum axe conveniat in P, & ex aliquo foco F ducto ramo FM, in ipsum ex P ducatur perpendicularis PD, erit portio MD æqualis semiparametro axis.*

IN Parabola id manifestum est, nam ducta diametro MR axi parallela, & ordinata ad axem MK, triangula MPD, PMK æqualia, & similia erunt, quia angulus DMP æqualis PMR (quorum singuli, cum æqualibus DME, RMS rectum complent) æquabitur MPK; unde cùm eadem sit hypothenusa MP, etiam latera homologa DM, PK æqualia erunt: sed KP subnormalis æquatur medietati lateris recti (*Coroll. 16. Prop.9.*); ergo eidem æqualis erit MD.

In Ellipsi autem, & Hyperbola, ducta ex centro

tro ad tangentem recta CI parallela ramo FM, & CS perpendiculari, seu parallela MP, erit angulus ICS æqualis PMD; utervis enim cum CIS, aut FME huic æquali, rectum complet: unde in triangulis similibus ICS, PMD, est IC ad CS, ut MP ad MD, & rectangulum ex IC in MD æquatur CS in MP; sed hoc (*Prop. præced.*) æquatur quartæ parti rectanguli ex axe QN in suam parametrum, idest CN in semiparametrum; ergo & illud: quare cùm sit IC æqualis semiaxi CN (*Prop. 21.*), MD æquatur semiparametro. Quod &c. *Fig. 87. 88.*

COROLL. Ducto etiam ramo VM, & in ipsum ex P ducta perpendiculari PR, erit MR æqualis semiparametro; nam triangulorum MPD, MPR latera omnia sunt æqualia, nempe MD ipsi MR, & PD alteri PR, ob æquales angulos DMP, RMP, necnon DPM, & RPM.

PROPOSITIO XXXII.

Rectangulum ex distantiis centri Ellipsis, aut Hyperbolæ à concursu tangentis MG cum axe, & concursu perpendicularis MP cum eodem, nempe GCP, æquatur quadrato distantiæ cujusvis foci a centro CF, aut CV. *Fig. 87. 88.*

Est enim VG ad GF, ut VP ad PF (*ex Coroll. 5. Prop. 21.*); ergo componendo in Ellipsi, & dividendo in Hyperbola, erit VG plus, aut minus GF ad GF, ut VP plus aut minus PF ad PF; idest dupla CG ad GF, ut dupla CF ad PF; ac sumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GF, ut est CF ad PF; ac demum eadem antecedentia ad differentiam terminorum in Ellipsi, vel ad summam in Hyperbola, comparando, erit CG ad CG minus, aut plus GF, (quæ erit CF), ut ipsa CF ad CF minus, aut plus PF, (quæ est CP). Quare

GCP æquatur quadrato ipsius CF, aut VC, cum sint continuè proportionales CG, CF, CP. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc quadratum semiaxis CN ad quadratum distantiæ foci à centro CF, est ut CK ad CP; nempe ut distantia ordinatæ ad axem MK à centro, ad distantiam concursus perpendicularis MP cum axe ab eodem centro; nam CN quadratum æquatur GCK, & CF quadratum vidimus æquari GCP, quæ rectangula sunt, ut CK ad CP.

COROLL. II. Unde CK ad CP est semper in eadem constanti ratione CN quadrati ad CF quadratum, ubicunque sumptum fuerit punctum illud M.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 89. 90. 91. *In omni sectione conica si tangentes BE, DE concurrant in E, recta ex E ducta, secans sectionem in A, H, & rectam jungentem contactus BD in I, erit harmonice divisa in his punctis, nempe resultabit EH ad HI, ut EA ad AI.*

Ducatur per punctum E diameter bissecans chordam BD in K, qui & bissecabit alias illi perallelas, ex punctis A, & H ductas, AM, HS; in punctis L, R, quæ concurrant, cum una tangentiom EB in O, & P. Erit ergo, ut quadratum RE ad quadratum EL, ita quadratum PR ad quadratum OL, & quadratum HR ad quadratum AL, & residuum rectangulum HPS ad AOM; sed hæc rectangula sunt, ut quadrata tangentium PB, OB (*Coroll.* 3. *Prop.* 16.); ergo quadratum PB ad quadratum OB est pariter, ut quadratum RE ad quadratum EL, sive ut quadratum PE ad EO quadratum. Est itaque tangens EBP harmonicè

secta

secta, cum sit PE ad EO, ut PB ad BO; quare etiam ab iisdem parallelis PR, BD, OM secta erit EH harmonicè; eritque HE ad EA, ut HI ad IA. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Vicissim si ex puncto E alicujus tangentis EB agatur EH, secans conicam sectionem in A, & H; & fiat, ut HE ad EA, ita HI ad IA, & juncta BI occurrat sectioni in D, juncta ED erit pariter tangens: nam si tangens ex E ad illam partem ducta non occurreret sectioni in D, sed in alio puncto ipsam tangeret, ex hoc alio contactu ducta recta ad contactum B, secaret AH in alio puncto diverso ab I, cujus partes forent pariter in ratione HE ad EA, ob harmonicam ipsius divisionem. Est autem impossibile, quod HA secetur in eadem ratione HI ad IA in alio puncto diverso ab I; ergo tangens ex E ducta ad partes D, non alibi curvam tangere potest, quàm in ipso D.

COROLL. II. Pariter si ex puncto E extra sectionem conicam ducta secans EAH, harmonicè in illis punctis, & in I secta sit, ducta ex puncto E diametro, & ex I ad ipsam diametrum ordinata BID, junctæ EB, ED erunt tangentes; nam si alibi tangerent, jungens contactus ipsam EH harmonicè secaret extra punctum I, quod est impossibile.

COROLL. III. Similiter si binæ secantes ex E ductæ, EAH, EMS in punctis aliis I, X, & in præcedentibus fuerint harmonicè sectæ, ducta recta IX sectionem secante in B, D, junctæ EB, ED erunt tangentes, ob eandem rationem.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 92. 93. 94. *Ex concursu E tangentium ED, EB, ductis binis secantibus sectionem conicam EAH, EMS in punctis A, H, & M, S, juncta MA, & SH, aut erunt parallelæ jungenti contactus BD* (ut in figuris prop. præced.), *aut in unum, idemque punctum T ipsius rectæ BD concurrent, sive intra, sive extra sectionem.*

SI enim AM sit parallela BD, erit EA ad AI, ut EM ad MX; atqui EA ad AI est, ut EH ad HI, (quia harmoniacè secta est EH, estque EH ad EA, ut HI ad AI); & similiter, ut EM ad MX, ita ES ad SX; ergo EH ad EA est, ut ES ad EM: unde etiam HS parallela est AM, & BD. Si verò non sint parallelæ, sed HS concurrat cum BD in T, ductis per A, & M rectis YAZ, FMG parallelis HT, convenientibus cum TI in Y, & F, ac cum juncta ET in Z, & G, erit HT ad AZ ut HE ad EA, sive HI ad IA, vel ut eadem HT ad AY, ob similia triangula TIH, IAY; quare erit AZ æqualis AY. Similiter erit MG æqualis MF; quia cùm sit SE ad EM, ut SX ad XM, erit quoque ST ad MG, ut eadem ST ad MF ob similia triangula TXS, MXF; ergo juncta TM erit in directum ipsi MA, quoniam in triangulo YTZ rectæ YZ, FG parallelæ in eadem æqualitatis ratione secantur: unde eadem linea debet esse TMA, alias juncta linea AT, si non transiret per M; bifariam secaret FG in alio puncto diverso ab M; quod est absurdum. Itaque rectæ HS, AM conveniunt in idem punctum T rectæ BD; Quod erat demonstrandum.

Fig. 95. 96. COROLL. I. Si rectæ secantes EAH, EMS sint infinities proximæ, rectæ AM, HS infinitè

parvæ

parvæ convenient cum partibus infinitesimis suæ curvæ, adeoque productæ ad punctum T rectæ BD convenientes, erunt ipsius conicæ sectionis tangentes. Quare si quælibet linea EAH ex concursu duarum tangentium E, secans sectionem in A, H, deducatur, atque ex punctis A, H aliæ tangentes ducantur, convenient ad punctum T rectæ BD jungentis priores contactus: seu ducta una tangente AT, concurrente cum ipsa BD in T, juncta TH erit tangens.

COROLL. II. Et recta TB erit harmonicè divisa in punctis T, D, B & in concursu I cum illa secante, nempe erit BT ad DT, ut BI ad ID (*ex prop.33.*)

PROPOSITIO XXXV.

Ex concursu E tangentium EB, ED ducta quavis secante EAIH, concurrente cum BD, jungente contactus, in I, si ipsi BD agatur parallela AM, juncta HM bifariam secabit BD in K, & ipsi BD ductæ ex E parallelæ EV, occurrens in V erit harmonicè secta ad puncta H, K, M, V, nempe erit HV ad VM, ut HK ad KM. Fig. 97. 98.

Quoniam æquidistantes sunt BD, AM, EV in eadem utique ratione secantur ab ipsis EH, & VH; quare cùm EH sit ab illis harmonicè secta, etiam VH ab iisdem harmonicè secta erit; ideoque HV ad VM, ut HK ad KM; sed ducta EK secante AM in L, & HG parallelam AM in G, erit ut HV ad VM, sive ut HE ad EA, ita HG ad AL, atque ita HK ad KM, adeoque & HG ad LM (ob similia triangula GKH, LKM): ergo est HG ad AL, ut eadem HG ad LM, ideoque AL æquatur LM: unde erit AM ordinata ad diametrum, cui ordinatur etiam ejus parallela BD,

tran-

transeuntem per concursum tangentium E, qualis erit ipsa ELK; unde & BD secta est bifariam in K ab ipsa secante HMV; Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc si per medium punctum K rectæ BD, jungentis duos contactus, trajiciatur quælibet recta HK, secans curvam in H, M, & EV ipsi BD parallelam, in V, erit in his punctis V, M, K, H harmonicè secta.

COROLL. II. Si ex quolibet puncto V rectæ EV parallelæ BD ducatur sectionis tangens VA, & ex A per medium punctum K rectæ BD agatur recta AK, occurrens sectioni in S, etiam juncta VS erit tangens; quia enim VH harmonicè secta sit in V, M, K, H, juxta hanc propositionem, sitque VA tangens, debet esse tangens etiam VS: si enim alibi tangeret supra, aut infra punctum S, recta jungens contactus, secaret MH alibi quam in K, ubi secat ipsam recta AS; sed (*ex prop.* 33.) recta jungens contactus secat harmonicè ipsam secantem ex concursu tangentium ductam; ergo alibi quam in K secaretur HM in ratione HV ad VM, quæ eadem jam est ac ratio HK ad KM; id quod est impossibile.

COROLL. III. Hinc habetur, quod si per idem aliquod punctum K innumeræ lineæ SA, HM ducantur, & ex eorum terminis tangentes ducantur, invicem convenient, (dummodò punctum K non sit centrum sectionis; tunc enim quælibet paria tangentium, ex terminis diametrorum ductarum per centrum, parallela forent, neque invicem usquam convenirent), in eadem recta linea EP, ducta parallela illi rectæ BD, quæ per illud punctum K bifariam secabitur, ex puncto concursus E tangentium ab illius extremitatibus ductarum BE, DE: nempe tam SV, AV, quam MP, HP conveniunt ad eandem lineam VEP, ex hac propositione.

CO-

COROLL. IV. Unde si per focum F quævis linea trajiceretur RS, tangentes ab ejus extemitatibus ductæ RV, SV convenient in V ad lineam sublimitatis EV, quæ per concursum tangentium ex terminis ordinatæ per focum ductarum, deducitur parallela ipsi ordinatæ, de qua dictum est *in prop.*19, de Parabola, & in *Coroll.*3. *prop.*29. de Ellipsi, & Hyperbola. Fig. 99. 100.

PROPOSITIO XXXVI.

Ex foco F cujusvis Conicæ sectionis ductis ad curvam duobus ramis FA, FB, & ex ipsis punctis A, B ductis tangentibus BD, AD, convenientibus in D, juncta DF bifariam secabit angulum AFB ab ipsis ramis contentum. Fig. 99. 100.

OCcurrat DF sectioni in R, S, ac rectæ BA, quæ jungit contactus, in I; ductisque tangentibus RV, SV, hæ convenient cum ipsa BA in eodem puncto V (*Coroll.* 1. *prop.* 34.), idemque punctum V erit ad lineam sublimitatis EV (*Coroll.*4.*prop.*35.): quare ductis ad ipsam lineam sublimitatis perpendicularibus AH, BP, erit ut BP ad AH, ita BV ad VA; sed quia BV harmonicè secta est in punctis B, I, A, V (*Coroll.*2.*prop.*34.), est BV ad VA, ut BI ad IA: ergo erit BI ad IA, ut BF ad FA, quæ sunt pariter, ut BP ad AH; cùm sit tam BF ad BP, quam FA ad AH in eadem ratione FN ad NE (*Coroll.*3. *prop.*29.). Itaque angulus AFB secatur bifariam à recta DF, cum basis AB secatur in I in ratione laterum trianguli ABF (3. VI. *Elem.*) Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc si rami ex foco sint in directum, ut resultat per quamlibet rectam SR per focum traductam, ductis ab ejus extremis tangentibus SV, RV convenientibus cum linea sublimi-

tatis

tatis in V, juncta VF erit ipsi RS perpendicularis, quia anguli SFV, RFV bis rectis aequantur, quorum medietas est quilibet angulus VFS, aut VFR rectus, uti de Parabola ostensum est supra (*Coroll.* 9. *Prop.*19.)

Fig.101 102. COROLL. II. Per quodlibet punctum A curvae interceptae inter terminos R, S rectae per focum traductae, ducatur alia tangens AT, occurrens tangentibus RV, SV ad puncta G, T, junctae ad focum rectae GF, TF angulum rectum GFT comprehendent, quia angulus GFA erit medietas anguli RFA, & angulus AFT medietas anguli AFS, adeoque GAT est medietas duorum rectorum, quibus aequantur RFA, AFS.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig.103 *Ex tangente Hyperbolae ANR ad verticem cujusvis diametri NQ sumantur hinc inde partes NA, NR aequales semidiametro conjugato CB, sive quarum quadrata sint aequalia quartae parti rectanguli sub transverso latere QN, & sub recto NS, tum ex centro C junctae CA, CR utcunque producantur, hae ad curvam hyperbolicam semper propius accedent, quam pro quolibet dato intervallo P, numquam tamen cum ipsa convenient. Dicantur autem hae rectae* Asymptoti *ipsius Hyperbolae.*

ORdinata enim ad eandem diametrum recta MKV parallela tangenti, secante dictas rectas asymptotos in D, Z, erit quadratum DK ad quadratum CK, ut quadratum AN, quod est quarta pars rectanguli QNS, ad quadratum NC, quod est pariter quarta pars quadrati QN, adeoque, ut rectangulum QNS ad quadratum QN, sive ut rectum latus NS ad transversum QN, quae pariter est ratio quadrati ordinatae MK, ad rectangulum QKN

QKN (*Coroll.* 6. *Prop.* 5.): quare cum sit totum quadratum DK ad totum quadratum CK, ut quadratum MK ex priori ablatum, ad rectangulum QKN sumptum ex posteriori, residuum quoque illius ad residuum hujus, nempe rectangulum DMZ ad quadratum CN erit in eadem ratione quadrati AN ad CN: unde patet, esse dictum rectangulum DMZ æquale quadrato AN, sive rectangulo ANR; ergo ut MZ ad NR, ita AN ad DM, estque semper prima multo major secunda, ergo & tertia major est quarta; ideoque cum producta in infinitum Hyperbola semper major, ac major fiat MZ ipsa NR, etiam AN semper multò major evadet intervallo DM, quod continuò minuetur in infinitum, uti crescit magis, ac magis in infinitum ipsa MZ; ita ut ratio illa AN ad DM major fieri possit qualibet data ratione AN ad P, uti major eadem ratione potest fieri ratio MZ ad NR; quia crescere potest in infinitum, tam ordinata MK Hyperbolæ, quam ordinata ZK trianguli, & ipsarum quælibet, ac multò magis utriusque summa MZ evadere potest major qualibet data, in majori recessu à vertice N ipsius Hyperbolæ. Accedit ergo CA magis, ac magis ad curvam Hyperbolæ NM, a qua minori semper intervallo DM distat, quod minus esse potest quolibet dato P, nec unquam cum ipsa penitus concurret, quia semper punctum M aliquo modo distabit à puncto D, ut esse possit rectangulum DMZ æquale quadrato AN, uti jam est demonstratum.

COROLL. I. Eædem rectæ Asymptoti ultra angulum C continuatæ abscindent pariter ex oppositi verticis tangente rectas QE, QX prioribus æquales, ob similitudinem triangulorum QEC, CAN, quorum æqualia sunt latera QC, & CN: unde patet ipsasmet CE, CX evadere eodem modo asymptotos oppositæ Hyperbolæ QI, cujus idem

est

est latus transversum, & latus rectum.

COROLL. II. Quælibet uni asymptoto parallela BH intra angulum ACR ducta, Hyperbolæ occurret; quia intervallum parallelarum idem semper manet, dum intervallum Hyperbolæ ab asymptoto semper minus evadit quolibet dato.

COROLL. III. Multò magis quælibet BC angulum ACR dividens Hyperbolam secabit; quippe ejus distantia ab asymptoto semper augebitur, dum Hyperbolæ distantia subinde minuitur.

COROLL. IV. Patet æqualia esse rectangula DMZ, *dmz* à portionibus quarumlibet parallelarum diametro ordinatarum, per Hyperbolæ curvam, & per asymtotos sectis, contenta; quippe singula (etiam DVZ, & *duz*) quadrato AN sunt æqualia.

COROLL. V. Etiam partes hinc inde acceptæ inter curvam, & asymptotos, nempe DM, & VZ æquales sunt, nam ut AN æquatur NR, ita DK æquatur KZ, & ordinata MK est æqualis KV, adeoque & reliqua DM est æqualis VZ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 104 *Si qualibet recta TD Hyperbolam alibi contingat, velut in V, occurrens asymptotis in T, D, erit TV æqualis VD, & cujuslibet quadratum æquale pariter quartæ parti rectanguli sub diametro ICV, & ejus latere recto VF contenti.*

Quando enim hoc non eveniret, sumptis hinc inde VG, VB, quarum quadrata æquarentur quartæ parti dicti rectanguli, junctæ CG, CB essent asymptoti, juxta præcedentem propositionem; Id quod est impossibile; nam si CG cadat ultra CT, ab ipsa magis, ac magis divertet in infinitum producta, adeoque non accedet

det curvæ Hyperbolicæ, ut facit asymptotus CT; & si cadat intra angulum asymptoticum TCD, ut recta CB, hæc producta secabit ipsam Hyperbolam (*ex Coroll.3.præced.*); adeoque non erunt CG, CB asymptoti: ergo ipsæ portiones VT, VD, non verò ipsis majores, aut minores, continebunt quadratum æquale quartæ parti rectanguli sub latere transverso IV, & latere recto VF contenti; unde invicem sunt æquales. Quod erat &c.

COROLL. I. Ordinata pariter ad diametrum CV recta LKO parallela tangenti TD, occurrente asymptotis in P, S, erit rectangulum PLS, aut POS æquale pariter quadrato VT, quemadmodum simile quid demonstratum est in *prop. præced.*

COROLL. II. Hinc pariter interceptæ inter curvam, & asymptotos PL, OS sunt æquales; unde quæcunque recta PS secet Hyperbolam, & asymptotos, ejus portiones curvæ, & asymptotis interpositæ æquales evadunt; nam bifariam secta OL in K, & juncta ex centro diametro CK, occurrente Hyperbolæ in V, ac per V ducta ipsi OL parallela TVD erit tangens, in V bifariam secta, ex hac propositione; & rectangula PLS, POS quadrato TV, aut VD æquabuntur: unde portiones PL, OS debent æquales esse.

COROLL. III. Constat ex dictis *in hac prop.* unicas esse asymptotos CT, CD, nec posse alias asymptotos eidem Hyperbolæ assignari.

PROPOSITIO XXXIX

Si qualibet QO Hyperbolas oppositas secet, occurrens Asymptotis in E, Z, ducta per centrum diametro ICV eidem QO parallela, erit rectangulum EOZ æquale quadrato semidiametri CV. Fig. 105

Ducatur tangens TVD, & per O ipsi tangenti parallela ordinetur OL eidem diametro, quæ asymptotos secet in P, S. Ratio rectanguli EOZ ad rectangulum SOP componetur rationibus laterum EO ad OP, (idest CV ad VT), & ZO ad OS, (nempe CV ad VD); sed & ratio quadrati CV ad rectangulum TVD idest ad quadratum VT ex iisdem rationibus componitur; ergo ut rectangulum EOZ ad aliud SOP, ita quadratum CV ad quadratum VT; sed (*ex præced. prop.*) rectangulum SOP æquatur quadrato VT, ergo & rectangulum EOZ quadrato CV erit æquale; Quod erat &c.

COROLL. I. Similiter ostendetur rectangulum ZQE quadrato CI æquari, quod CV quadrato æquale est: unde æqualia erunt rectangula EOZ, & ZQE, & rectæ OZ, QE erunt pariter æquales; quia horum rectangulorum æqualitas dat rationem laterum EO ad EQ æqualem rationi QZ ad ZO, unde componendo OQ ad QE erit ut OQ ad ZO; quare interceptæ asymptotis, & utraque Hyperbola QE, & OZ æquantur, sicut etiam OE, & QZ æquabuntur, sicut & rectangula QEO, QZO æqualia erunt.

COROLL. II. Et quia ducta etiam qualibet alia *o z e q* eidem diametro VCI parallela erit pariter rectangulum *e o z aut z q e*, seu *q e o*, aut *q z o* eidem quadrato CI æquale, erunt ergo invicem æqualia quælibet rectangula EOZ, *e o z* a portionibus rectarum æquidistantium, interceptis Hyperbola utraque, & asymptotis, contenta, & partes *o z*, *q e* æquales resultabunt, nec non *e o*, & *z q*.

PROPOSITIO XL.

Fig. 106, 107. *Si in eadem Hyperbola, vel in oppositis duo puncta O, V accepta fuerint, ex quibus rectæ OS, VD invi-*

invicem parallelæ ductæ fuerint, ad asymptotos terminatæ, necnon duæ aliæ OP, VT pariter invicem parallelæ ductæ sint usque ad easdem asymptotos, erit rectangulum SOP æquale rectangulo DVT.

Juncta enim recta OV, quæ asymptotis occurrat in I, L erunt interceptæ OI, VL æquales (*ex Coroll.2.prop.38. & 39.*), nec non OL, & VI æquabuntur; ergo OL ad VL est, ut VI ad OI; sed ob similia triangula, est OP ad VT, quemadmodum OL ad VL, atque VD ad OS, ut VI ad OI; ergo OP ad VT est, ut VD ad OS; quare rectangula SOP, DVT æquantur.

COROLL. I. Si per quælibet puncta hyperbolæ V, N ductæ sint ad asymptotos parallelæ VT, VD, & NR, NA, erit parallelogrammum RNA æquale parallelogrammo TVD; nam quia hæc rectangula sunt æqualia, etiam æquiangula parallelogramma, ob æqualem laterum reciprocè comparatorum rationem, æquari debent. *Fig.108*

COROLL. II. Unde & triangula CNR, CVT, eorum parallelogrammorum dimidia æquari debent.

COROLL. III. Hinc semper ratio ordinatarum ad asymptotum NR, VT alteri asymptoto æquidistantium, eadem est ac ratio distantiarum reciprocè sumptarum CT, CR, ob æqualia illa rectangula, aut parallelogramma, vel triangula supradicta, quæ circa æquales angulos latera habere debent reciprocè proportionalia.

COROLL. IV. Ductis tangentibus PNM, HVG ad asymptotos terminatis, quæ bifariam sectæ sunt in contactibus N, V (*ex prop.38.*), erunt quoque triangula CPM, CHG huic spatio asymptotico inscripta, invicem æqualia, quippe dupla parallelogrammorum æqualium RNA, TVD, ſeu quadrupla triangulorum æqualium CNR, CVT.

COROLL. V. Quadrilatera mixta RNVT, & ANVD ſunt invicem æqualia, nam obæqualitatem parallelogrammorum TVD, RNA, communi oblato CRXD, eſt TVXR æquale ANXD, & adjecto utrinque trilineo VXN, fit RNVT æquale ANVD.

COROLL. VI. Item ſector hyperbolicus CVN æquatur cuilibet ex dictis quadrilateris RNVT, aut ANVD; nam ob triangulum RCN æquale CTV, dempto utrinque triangulo CRZ, additoque trilineo VZN, reſultat VCN ſector æqualis ipſi RNVT, aut huic æquali ANVD.

PROPOSITIO XLI.

Fig.109 *Si hyperbolæ NV, GH ſint inter aſymptotos ACE, & CT, quæ angulos ACT, TCE ſibi conſequentes binis rectis æquales comprehendunt, & illas curvas ſecent rectæ NH, VG uni aſymptotorum ACE parallelæ, ſecabuntur ab alia aſymptoto CT in punctis R, T in eadem ratione.*

NAm (*ex Coroll.3. præced.*) ordinatæ NR, VT ſunt ut reciprocæ diſtantiæ TC, CR, in qua pariter ratione erunt aliæ ordinatæ RH, TG; quare & permutando erit NR ad RH, ut eſt VT ad TG: Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc Quadrilaterum RNVT ad quadrilaterum HRTG erit ſemper in eadem ratione NR ad RH, eo quod omnes rectæ in utroque ordinatæ, ipſis NR, & RH parallelæ ſunt in data ratione.

COROLL. II. Et junctis ad centrum C rectis NC, VC, GC, CH erunt pariter ſectores CNV, CGH in eadem ratione; utpote dictis quadrilate-

ris

ris RNVT, & RHGT æquales (*ex coroll. 6. prop. præced.*)

COROLL. III. Si ex punctis N, H agantur tangentes hyperbolarum ad asymptotos productæ, existente NH asymptoto ACE parallela, convenient tangentes ad idem punctum T alterius asymptoti; nam quia HE æquatur HT, etiam CR æquabitur RT; & quia AN æquatur NT, pariter CR eidem RT æquatur quare utrinque respondet eadem RT æqualis CR: unde idem est punctum T, in quo duæ illæ tangentes conveniunt.

COROLL. IV. Et si ex eodem puncto T unius asymptoti agantur hyperbolarum tangentes THE, TNA, jungens contactus HN alteri asymptoto ACE parallela erit; quoniam utraque illa tangens bifariam secatur in contactibus H, N; ideoque latera TE, TA proportionaliter secta sunt ab ipsa rectaHN,quæ propterea parallela erit basi EA.

COROLL. V. Ipsaque triangula CAT, CTE illis asymptoticis spatiis inscripta erunt semper in data ratione, quæ est NR ad RH, quibus proportionantur bases AC, & CE; idque etiam in triangulis ad idem punctum minime concurrentibus eveniet, quia in quolibet asymptotico spatio ejusdem hyperbolæ inscripta triangula per suas tangentes, æqualia sunt(*per Coroll.*4.*Prop.*40.)

PROPOSITIO XLII.

Si ad secundam diametrum HI, priori diametro transversæ NQ conjugatam fiant duæ oppositæ hyperbolæ HK, IF, quarum vicissim secunda diameter conjugata sit eadem NQ, erunt harum quatuor sectionum communes Asymptoti. Vocentur autem hæ pariter sectiones conjugatæ. Fig. 110.

Ductis tangentibus NT, IT convenientibus in T, quæ erunt parallelæ ordinatis diametrorum NQ, HI, adeoque & conjugatis semidiametris CI, CN, juncta CT erit asymptotus communis utrique Hyperbolæ NV, IF; quia cum sit CNTI parallelogrammum, est NT quadratum æquale quadrato CI, seu quartæ parti rectanguli sub transverso latere QN, & ejus latere recto; & similiter tangens IT æqualis semidiametro alteri Hyperbolæ conjugato CN, continet quadratum æquale quartæ parti rectanguli sub transverso latere HI, & recto sibi correspondente comprehenso; ac similiter ducta alterius oppositæ Hyperbolæ HK tangente HA parallela ipsi IT, ac producta tangente TN, concurrente cum HA in A, erit HANC parallelogrammum, ipsæque tangentes NA, HA æquales erunt conjugatis semidiametris sibi oppositis CH, CN; unde & juncta AC erit hisce Hyperbolis asymptotus communis (*ex Prop.37.*): igitur ipsæ TCX, ACE sunt communes asymptoti harum quatuor sectionum, quæ invicem *conjugatæ* dicentur.

COROLL. I. Jungens contactus NI, cum evadat diameter parallelogrammi CNTI, bifariam secabitur ab asymptoto CT in R, quia CT est alia diameter ejusdem parallelogrammi.

COROLL. II. Et quia (*ex coroll.4.prop.præced.*) NI æquidistabit alteri asymptoto AE, etiam quælibet alia VF jungens contactus aliarum tangentium PF, PV ex eodem aliquo puncto P communis asymptoti deductarum, ipsimet AE æquidistabit, & bifariam secabitur in Z, cum sint in eadem ratione NR ad RI, ac VZ ad ZF (*per Prop.41.*)

COROLL. III. Et quia etiam CP bifariam secta est in 7, ut tangens PFM est bifariam secta in F (*ex Prop.38.*), erunt CF, CV ductæ ex centro ad ad contactus parallelæ tangentibus PV, PF; adeoque erunt semidiametri conjugatæ harum Hyperbolarum, quia PF æquatur CV sibi parallelæ, & PV æquatur parallelæ CF; unde CV æquidistat ordinatis ad diametrum CF, & CF æquidistat ordinatis ad diametrum CV.

COROLL. IV. Hæc parallelogramma CNTI, CVPF semper erunt æqualia, sicut æquantur triangula CNR, CVZ (*ex Coroll. 2. Prop.40.*), quæ sunt quartæ partes dictorum parallelogrammorum.

COROLL. V. Et quodvis parallelogrammum RLSM iisdem Hyperbolis conjugatis inscriptum, contentum ab ipsarum tangentibus per terminos diametrorum conjugatorum ductis erit æquale cuilibet alteri inscripto parallelogrammo ATEX ab aliis tangentibus, per terminos aliorum diametrorum conjugatorum ductis, comprehenso; Hæc enim parallelogramma erunt quadrupla æqualium triangulorum CLR, CAT, sive æqualium parallelogrammorum CVRF, CNTI. *Fig.* 111

COROLL. VI. Junctis quoque contactibus ad terminos conjugatorum diametrorum positis, fiet parallelogrammum KVFG æquale alteri HNIQ; sunt enim hæc parallelogramma medietates aliorum RLSM, ATEX invicem æqualium; quippe & triangula CNI, CVF, quartæ partes dictorum parallelogrammorum KVFG, HNIQ, medietates sunt parallelogrammorum CNTI, CVRF, quæ sunt aliorum RLSM, ATEX pariter quadrantes.

PROPOSITIO XLIII.

Etiam in Ellipsi, ut in Hyperbolis conjugatis, parallelogramma RLSM, ATEX, ex tangentibus ad terminos duorum diametrorum conjugato- *Fig.* 112

rum GV, KF, aut NQ, HI ductis, comprehensa, semper æqualia erunt; sicut etiam sunt æqualia parallelogramma eidem Ellipsi inscripta KVFG, HNIQ ex rectis jungentibus terminos binorum diametrorum conjugatorum.

JUngantur duo puncta V, I, & ad diametrum NQ ordinata per V recta VP, secante tangentem IT in Z; tum per I ad diametrum FK ordinata IB, quæ tangenti VR concurrat in O, erit utique parallelogrammum CVOB æquale alteri alteri CPZI; quoniam utrumque duplum est trianguli ipsis inscripti CVI: at concurrente semidiametro CF cum tangente IE in D, & semidiametro CN cum tangente VL in Y, atque utraque tangente ID, VL in Æ, erit parallelogrammum DCYÆ ad CFRV, ut hoc ipsum ad CVOB, cum sint æquè alta, & eorum bases CD, CF, CB continuè proportionales (*ex coroll.* 11.*prop.*9.); & idem DCYÆ ad CNTI est, ut hoc ipsum ad CPZI, ob proportionales bases CY, CN, CP, & eandem horum parallelogrammorum altitudinem; ergo inter DCYÆ, & CVOB, vel huic æquale CPZI, tam est medium proportionale CFRV, quam CNTI; ergo hæc duo sunt æqualia: sunt autem quartæ partes parallelogrammorum RLSM, & ATEX; ergo hæc pariter sunt æqualia; & horum dimidia sunt inscripta reliqua KVFG, & HNIQ, (ut triangulum CFV est dimidium CFRV, & triangulum CNI dimidium est CNTI, quæ triangula sunt pariter quartæ partes dictorum parallelogrammorum Ellipsi inscriptorum): ergo hæc pariter parallelogramma inscripta sunt æqualia, uti etiam æquantur alia circumscripta. Quod erat, &c.

COROLL. I. Patet esse FC divisum in B proportionaliter, ac NC in P, quia DCYÆ ad CVOB, est

est ut idem illud ad CPZI huic æquale; adeoque ratio DC ad CB est eadem, ac YC ad CP: sed illa est dupla rationis FC ad CB, hæc autem dupla rationis NC ad CP; ergo hæquoque rationes FC ad CB, & NC ad CP sunt æquales; Unde quoties conjugatæ sunt diametri FK, UG, & pariter binæ aliæ conjugatæ NQ, IH, ex termino V diametri VG ducta ordinata ad diametrum NQ, & ex termino I diametri IH, ordinata IB ad diametrum FK, secabuntur proportionaliter diametri NQ, & FK ab ipsis ordinatis; nam NQ dupla NC erit ad CP, ut FK dupla FC ad CB; sive illa ad residuum PN, ut hæc ad residuum BF.

COROLL. II. Quin etiam si ex utriusque diametri conjugati terminis N, I ordinentur super alias conjugatas diametros N*b*, IB, erunt hæ diametri VG, FK in punctis *b*, B proportionaliter sectæ; erit enim VC ad C*b*, ut YC ad CN, (quia ordinata N*b* est parallela tangenti YV); adeoque ut CN ad CP, sive ut CF ad CB; ideoque VC ad C*b*, ut FC ad CB, & VC ad reliquam V*b*, ut ipsa CF au residuam FB; ac duplicatis antecedentibus VG ad V*b*, ut KF ad FB; uti etiam dividendo, G*b* ad *b*V erit, ut KB ad BF.

COROLL. III. Erunt ergo rectangula G*b*V & KBF, ut quadrata CV & CF, sen GV, & KF, aut ut latus transversum GV ad suum latus rectum, sive ut rectangulum G*b*V ad quadratum N*b*, vel ut quadratum IB ad rectangulum KBF; & ideò quadratum N*b* erit æquale KBF rectangulo, quadratum verò IB æquabitur rectangulo G*b*V.

PROPOSITIO XLIV.

Quadrata duorum quorumlibet diametrorum conjugatorum IH, NQ æquantur quadratis axium KF, GV. eadem Fig. 112

Ducta

Ducta enim ex I ordinata IB ad KF, & ex N ordinata Nb ad GV, erit quadratum CN æquale quadratis Nb, Cb; quadratum autem CI æquale quadratis CB, IB: sed Nb quadratum æquatur rectangulo KBF, & IB quadratum æquale est GbV (*ex Coroll.3. Prop.prac.*); ergo duo quadrata CN, CI æquantur rectangulo KBF cum quadrato CB, & rectangulo GbV, cum quadrato Cb; adeoque sunt æqualia binis quadratis CF, & CV; & assumptis eorum quadruplis, quadrata NQ, & IH æquabuntur quadratis KF, & GV. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc quadrata duorum diametrorum conjugatorum æquantur quadratis aliorum quorumlibet diametrorum pariter conjugatorum; nam quælibet horum quadratorum paria æquantur quadratis utriusque axis.

COROLL. II. Quadrata etiam GF, & FV erunt æqualia quadratis QI, & IN; nam illa æquantur duplo quadrato CF, & CV; hæc autem duplo quadrato IC, & CN; sed quadrata CF & CV æquantur quadratis CI, & CN; ergo etiam GF, & FV quadrata sunt æqualia quadratis QI, & IN.

PROPOSITIO XLV.

Fig.113 *At in Hyperbolis, quadrata diametrorum conjugatorum IH, NQ, (si fuerint inæqualia) eadem quantitate inter se differunt, ac bina qualibet aliorum diametrorum conjugatorum KF, GV quadrata.*

Ductis enim ex N, & V inter asymptotos tangentibus ANT, LVR, quæ ipsis secundariis diametris IH, KF æquabuntur, nam NA æquabitur semidiametro CH, & VL semidiametro

tro CK; & actis in asymptoto CA perpendicularibus NM, TB, atque VE, RD, patet fore AM æqualem MB, ut AN æquatur NT: unde differentia quadratorum CN, AN, quæ est eadem, ac differentia quadratorum CM, MA (quia CN quadratum æquatur CM, & MN quadratis, & AN quadratum æquatur quadratis AM, MN; unde ablato communi quadrato MN, remanet illorum quadratorum differentia eadem, quæ CM, & AM) erit eadem, ac differentia quadratorum CM, & MB, quæ eadem est, ac rectangulum ACB. Similiter differentia quadratorum CV, & VL eadem erit, ac differentia quadrati EC à quadrato EL, sive ab æquali ED, cujusmodi erit rectangulum LCD. Sed rectangula ACB, LCD sunt æqualia, quippe CB ad CD est, ut CT ad CR, adeoque ut LC ad CA (ob æqualitatem triangulorum CLR, CAT *ex Coroll.* 4. *Prop.* 40., quibus inesse debent, circa communem angulum C, latera reciprocè proportionalia *per prop.* 15. VI. *Elem.*); ergo eadem est differentia quadratorum NC, & NA, sive CH, & quadratorum CV, VL, sive CK: unde & eorum quadruplis assumptis, erit eadem differentia quadratorum QN, HI, ac quadratorum VG, KF; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Sumptis in Hyperbolæ asymptoto distantiis à centro CL, CO, CA continuè proportionalibus, & hinc ductis LP, OK, AI alteri asymptoto parallelis, Hyperbolam in punctis P, K, I secantibus, erunt spatia Hyperbolica ipsis intercepta LPKO, OKIA, invicem æqualia. Fig. 114

Completis parallelogrammis CLPR, COKS, CAIM, productisque AI, RP convenientibus

bus in T, quæ resultant parallelogramma CLEM, COKS, CATR, erunt similia; nam ut AC ad CO, ita OK ad AI (*ex Coroll. 3. prop. 40.*): sed AC ad CO est, ut CO ad CL, ergo CO ad CL est, ut OK ad AI, sive ut CS ad CM, ergo CLEM, & COKS sunt similia. Pariter est LP ad OK sive CR ad CS, ut OC ad CL, hoc est, ut CA ad CO; ergo etiam CATR simile est eidem COKS: adeoque & alteri CLEM; quare diameter CT per reliquos angulos E, K transit; & juncta PI erit quoque diameter parallelogrammi PEIT, ab ipsa CET bifariam secta in X: unde erit PI ordinata Hyperbolæ ad diametrum CKX, transeuntem per verticem K segmenti Hyperbolici PKI. Ab æqualibus ergo triangulis CPX, CXI ablatis semihyperbolis æqualibus PKX, IKX, remanebunt æquales sectores CPK, CIK; sed ipsis æquantur spatia Hyperbolica LPKO, OKIA (*Coroll. 5. prop. 40.*): ergo hæc quoque resultant æqualia. Quod &c.

Fig. 115 COROLL. I. Si pariter sumantur in asymptoto CA ad CO, ut quævis alia CD ad CL, ductis indè parallelis alteri asymptoto AI, OK, & DQ, LP, resultabunt æqualia spatia Hyperbolica AIKO, & QDLP; sumpta enim CN media inter extremas CA, CL, adeoque & inter medias CO, CD, & ordinata NV, erit spatium IANV æquale VNLP; necnon KONV æquale VNDQ; ergo & reliquum AIKO æquabitur QDLP.

COROLL. II. Et si sumptæ fuerint quotlibet distantiæ continuè proportionales CA, CO, CN, CD, CL, ordinatis correspondentibus resultabunt æqualia spatia Hyperbolica iis interposita IAOK, KONV, VNDQ, QDLP &c.

COROLL. III. Quoniam si duplicata sit ratio LC ad CN rationis DC ad CN, erit spatium VNLP duplum VNDQ, & si esset triplicata prima ratio secundæ, esset primum spatium triplum

secunfecundi, totidem enim æqualia ſpatia contineret, quot æqualibus rationibus ejus ratio componeretur: Hinc quodlibet ſpatium KOLP eſt ad aliud ſpatium QDLP, ut ratio LC ad CO, eſt ad rationem LC ad CD, juxta quantitatem logarithmicam proportionum.

COROLL. IV. Quæ dicta ſunt de his ſpatiis valent etiam de ſectoribus Hyperbolicis ICK, QCP, VCQ &c. quæ correſpondentibus ſpatiis aſymptoto adjacentibus ſunt ſemper æqualia:

COROLL. V. Patet autem, totum ſpatium inter curvam Hyperbolicam, & ejus aſymptotos interjectum, & in infinitum productum, eſſe infinitæ magnitudinis, quia cum poſſint rationes CA, CO, CN &c. in infinitum continuari, infinita ſpatia primo IAOK æqualia correſpondebunt hiſce infinitis rationibus, in eodem aſymptotico ſpatio contenta.

PROPOSITIO XLVII.

Si recto latere NR, æquali tranſverſo NQ Hyperbolæ æquilateræ NM, ad eundem axem parabola NB deſcribatur, ducta quavis recta BD, axi parallela, conveniente cum axe ſecundario Hyperbolæ CE in D, & cum Hyperbola in M, erit Hyperbolicum ſpatium CNMD æquale rectangulo ex ſemiaxe tranſverſo CN in curvæ parabolicæ portionem NB, vertici, & eidem rectæ BD interpoſitam. Fig. 116.

ORdinata enim MK ad Hyperbolam, & BA ad parabolam, quam tangat BG, eique perpendicularis ducatur BP, juncta DN erit ipſi BP æqualis, & parallela; nam ſubnormalis AP æquatur NC, cum debeat eſſe medietas lateris recti (*Coroll.16.Prop.9.*), & AB eſt æqualis CD, unde & baſis BP trianguli rectanguli BAP æquatur baſi

DN

DN alterius trianguli rectanguli DCN; sed ipsa DN æquatur DM; quippe rectangulum QKN est æquale quadrato KM, (ut diameter transversa QN æquatur parametro NR) seu CD, & juncto quadrato CN, quadratum CK, seu DM erit æquale DN quadrato: quare etiam BP æquabitur DM. Ac sumpto in tangente BG puncto I infinitè proximo ipsi B, ductaque HIE parallela BD, quoniam ob triangulorum IHB, BAP similitudinem est IB ad BH, sive ad DE, ut BP ad PA, sive ut DM ad CN, erit rectangulum EDM æquale CN in ipsam IB, quæ ob infinitam proximitatem eadem est, ac portio infinitè parva curvæ parabolicæ, uti rectangulum EDMO, ob rectam OE infinitè proximam DM, idem ferè est, ac spatium EDMF Hyperbolicum, a quo differt spatio FOM infinities minori; Idque cum semper eveniat, patet fore rectangulum ex CN in totam curvam parabolicam NB æquale spatio Hyperbolico CDMN ipsi correspondenti; Quod erat &c.

COROLL. Ex quo DN ostensa est æquari DM, patet facilis modus describendi Hyperbolam æquilateram, inclinatis recto angulo NCD innumeris rectis NE, ND, mox ductis ipsi CN parallelis EF, DM, quæ dictis inclinatis NE, ND sint æquales; nam puncta N, F, M erunt ad curvam Hyperbolicam æquilateram.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 117 118. *Si eodem axe transverso NQ, & alio latere recto NG describatur Hyperbola NABK, sumpta media proportionali NT inter hoc latus rectum, & transversum, sive rectum NR Hyperbolæ æquilateræ NFM, erit spatium NBK ad NMK, ut NG ad NT.*

Ordi-

ORdinetur quævis alia AH, secans æquilateram Hyperbolam in F. Erit quadratum BK ad rectangulum QKN, sive ad quadratum KM Hyperbolæ æquilateræ, quod illi æquatur, ut GN ad NQ sive ad NR; ut autem GN ad NR, ita quadratum GN ad quadratum NT mediæ proportionalis inter illas; ergo erit BK ad MK, ut GN ad NT; similiter autem erit AH ad HF, ut GN ad NT: ergo omnes lineæ spatii Hyperbolici NBK ad omnes alterius NMK, adeoque & spatium descriptæ Hyperbolæ ad illud Hyperbolæ æquilateræ, est ut latus rectum GN primæ ad NT mediam proportionalem inter ipsum GN, & transversum NQ, aut rectum alterius NR; Quod &c.

PROPOSITIO XLIX.

Spatium Parabolæ CAK æquatur duabus tertiis parallelogrammi ipsi circumscripti IHCK. Fig. 119

ORdinetur DB ad diametrum AE, & per B ducta FBL diametro parallela, jungatur AC, secans DB in G, & LF in M. Ex revolutione parallelogrammi AHCE, & trianguli ACH, circa AH, fiet cylindrus triplus coni; & cum sit circulus radii LF, sive HC ad circulum radii ML, ut quadratum illius ad quadratum hujus, sive ut quadratum AH ad quadratum AL, nempe ut quadratum EC ad DB quadratum; scilicet ut recta EA ad abscissam AD, sive ut FL ad LB; ideò omnes æquales circuli illius cylindri erunt ad omnes circulos inscripti coni, ut omnes æquales lineæ parallelogrammi, ad omnes lineas trilinei parabolici ABCH, quare ut cylindrus est triplus coni, ita parallelogrammum AHCE triplum est trilinei ABCH; adeoque reliquum parabolicum spatium ABCE æquatur duabus tertiis partibus dicti

dicti parallelogrammi AECH, & duplicando utrumque spatium, parabola integra CAK est æqualis duabus tertiis circumscripti parallelogrammi IHCK: Quod erat, &c.

COROLL. I. Hinc patet, esse parabolam sesquitertiam trianguli inscripti, cum enim sit parabola ad parallelogrammum, ut 2. ad 3. & parallelogrammum ad triangulum, ut 2. ad 1. erit parabola ad triangulum in ratione composita ex 2. ad 3., & 2. ad 1., adeoque ut 4. ad 3.

COROLL. II. Parabola ABCE ad partem ABD, sectam ordinata BD est, ut cubus EC ad cubum DB; nam quia etiam ABD æquatur duabus tertiis parallelogrammi ADBL, est ABCE ad ABD, ut AECH ad ADBL, scilicet in ratione composita ex ratione basium EC, DB, & altitudinum EA, DA quæ duplicata est illius, cùm sit ut quadratum EC ad DB quadratum; quare erunt hæc spatia in ratione triplicata ordinatarum EC, DB, adeoque ut cubi earundem.

PROPOSITIO L.

Fig. 120 *Circulus diametri AP æquatur triangulo rectangulo CAB, cujus altitudo radius CA, basis autem AB sit æqualis circumferentiæ PA.*

Nam per quodlibet punctum radii D, ducta concentrica peripheria DF, & in triangulo recta DE basi parallela, erit AB ad DE, ut peripheria PA ad peripheriam FD, cùm tam hæ, quàm illæ sint, ut AC ad CD: quare ut AB æquatur peripheriæ PA, ita DE æquatur alteri peripheriæ FD, & hoc ubique accidet: omnes ergo lineæ trianguli CAB æquantur omnibus peripheriis concentricis ipsius circuli; ergo est triangulum circulo æquale; Quod &c.

CO-

COROLL. Hinc circulus idem æquabitur rectangulo ex radio in dimidiam circumferentiam, vel ex tota circumferentia in dimidium radii, seu quartam partem diametri: unde quia ex calculo archimedeo est circumferentia ad diametrum, ut fermè 22. ad 7. erit circulus ad quadratum diametri, ut 38, cum dimidio, ad 49, sive ut 77 ad 98, hoc est ut 11. ad 14.

PROPOSITIO LI.

Ellipsis NEQ est ad circulum super axe majori NQ descriptum, ut minor axis ad majorem. Fig. 121

Ordinata per centrum CE; quæ est semiaxis minor Ellipsis, & producta ad circulum in B, tum qualibet alia ordinata KM, pertingente ad circulum in D, ut rectangulum QKN ad QCN, ita erit quadratum MK ad quadratum EC, & quadratum DK priori rectangulo æquale, ad BC quadratum æquale alteri QCN. Ergo omnes lineæ Ellipsis ad omnes lineas circuli sunt, ut EC ad CB; adeoque spatium totius Ellipsis ad integrum circulum, est ut semiaxis minor EC ad radium CB, seu CQ semiaxem majorem, adeoque ut axis minor ad majorem; Quod &c.

COROLL. Ductis ex centro rectis CM, CD, erit pariter sector Ellipticus CMQ ad sectorem circularem CDQ in eadem ratione minoris axis ad majorem; nam segmentum MKQ ad segmentum DKQ, & triangulum CMK ad CDK, sunt ut MK ad DK, adeoque ut EC ad BC, seu CQ.

PROPOSITIO LII.

Si qualibet sectio Conica AEB circa suum axem ED rotetur, cuius tangentes ex terminis basis Fig. 122

ducta AF, BH, cum verticali tangente EF conveniant in F, H, junctis ad medium basis D rectis FD, HD, erit solidum Conoidale ex rotatione DEB genitum æquale solido, ex trianguli DHB rotatione circa eundem axem facta, prodeunti: solidum autem ex trilinei ENBH revolutione circa ipsum axem æquatur cono, ex trianguli EDH revolutione genito.

Ducta enim ubilibet basi, & tangenti verticali parallela LK, secante axem in I, tangentes in L, K, curvam in M, N, rectas FD HD in O, P erit rectangulum MKN ad quadratum KB, ut quadratum EH ad HB quadratum (*ex prop.* 16.), & permutando, rectangulum MKN ad quadratum EH, ut quadratum KB ad quadratum HB, sive ut DI quadratum ad quadratum DE, vel, ut quadratum IP ad quadratum EH; quare IP quadratum æquatur rectangulo MKN, scilicet differentiæ quadratorum IK, IN: unde & circulus radio IP descriptus erit æqualis differentiæ circulorum à radiis IK, IN descriptorum, sive armillæ circulari, quæ in revolutione trilinei ENBH circa axem ED gignitur à recta NK; & hoc semper eveniet; quare conus à triangulo EDH circa ED revoluto descriptus, cujus sectiones sunt circuli radiorum IP, æquabitur solido ex revolutione trilinei ENBH circa eundem axem, cujus sectiones sunt armillæ per rectas NK descriptæ. Sed hoc solidum ex trilineo ENBH, cum solido conoidali ex revolutione conicæ sectionis ENBD circa ED, æquatur solidis ex triangulo EDH, & ex triangulo DHB circa eundem axem revolutis; ergo ut solidum ex trilineo ENBH æquatur Cono ex triangulo EDH, etiam reliquum solidum conoidale ex revolutione ENBD æquatur residuo solido genito ex trianguli DHB revolutione circa eun-

eundem axem. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I. Productis tangentibus collateralibus AF, BH quæ cum axe conveniant in G, & in basi secta DS, cujus quadratum æquet differentiam quadrati AD ab FE quadrato, juncta GS, erit Conoides ex revolutione ENBD circa axem ED, æqualis Cono, ex rotatione trianguli SGD circa GD; nam Conus ex revolutione trianguli ADG est triens producti ex circulo radii DA in DG, & conus ex triangulo FEG, cum cono ex triangulo FED est triens producti ex circulo radii EF in EG, plus ED, ideft in eandem DG; ergo excessus coni ex ADG supra conos ex FEG, & FED, hoc est solidum ex revolutione trianguli AFD, seu DHB circa ED, nempe conois ex rotatione ENBD æquabitur trienti producti, ab excessu circuli DA radio descripti, supra circulum radii EF, in eandem altitudinem DG; quare cum sit quadratum DS differentia quadratorum DA, EF, etiam circulus radii DS est excessus circuli DA supra circulum EF; ideoque conus à triangulo SGD genitus æquatur ipsi Conoidi.

COROLL. II. Si curva AENB sit parabola, erit Conoides ab ipsa procedens æqualis triplo solidi ex revolutione trianguli GFD circa ipsam GD; quia enim subtangens DG est dupla GE, est AD dupla FE, & illius quadratum hujus quadruplum; unde circulus radii DS erit triplus circuli radii EF, ideoque conus ex triangulo SGD, nempe ipsa Conois, triplo major erit solido ex rotatione GFD, qui æquatur Cono ex circulo radii EF in ipsam altitudinem GD.

COROLL. III. Quælibet Conois est ad Conum inscriptum à triangulo DEB circa axem ED revoluto, genitum, ut summa basis DB, & verticalis tangentis EH, ad ipsam DB; Nam radio Fig. 123

DB circulo BVA descripto, & ducta HV axi parallela secante basim in T, circulum in V, & junctæ DV perpendiculari TI, erit TV quadratum excessus quadrati DV supra quadratum DT, seu differentia quadratorum DB, EH: quare cum sit Conois (*ex Coroll.* 1.) æqualis cono, cujus basis circulus radii TV, & altitudo DG; erit ad conum inscriptum radii DB, & altitudinis DE in ratione composita, quadrati TV ad quadratum DB seu DV, ideft IV ad VD, & ex GD ad DE, quæ est eadem, ac GB ad BH, seu DB, aut DV ad TB; ergo Conois ad inscriptum Conum est, ut IV ad BT; sed in hac ratione est quoque AT ad DV (nam rectangula IVD, ATB sunt æqualia, eo quod quadrato TV æquantur): ergo ratio Conoidis ad inscriptum Conum est eadem quæ AT ad DV, ideft DB plus EH ad DB.

COROLL. IV. Unde pariter Conois ad inscriptum Conum erit, ut DG plus GE ad ipsam DG, ideft producto axe ad R, ut sit GR æqualis GE, erit ratio conoidis ad conum inscriptum, eadem quæ DR ad DG.

COROLL. V. Hinc Conois Parabolica erit sesquialtera Coni inscripti, quia DR erit tripla DE, cujus dupla est DG, unde DR ad DG est, ut 3. ad 2. Et quia cylindrus Conoidi circumscriptus esset triplus inscripti coni, foret is duplus Conoidis parabolicæ sibi inscriptæ, quippe cum sit cylindrus ad conum, ut 6. ad 2. & conus ad conoidem, ut 2. ad 3., erit cylindrus ad conoidem, ut 6. ad 3. ideft duplus.

Fig. 124 COROLL. VI. Si curva AEB sit semicirculus, aut semiellipsis, quoniam laterales tangentes AF, BH, ex terminis alterius axis AB ductæ, sunt parallelæ axi ED, erit tangens EH æqualis DB; ergo DB plus EH est dupla DB, adeoque hemisphaerium, sive hemispherois Elliptica dupla

erit

erit inscripti coni; Cylindrus autem circumscriptus hemisphaerio, aut hemispheroidi erit, ejus sesquialter; nam cylindrus ad conum est ut 3. ad 1. conus verò ad hemisperium, aut hemisperoidem, ut 1. ad 2. ergo cylindrus ad illud solidum hemisphærium; vel hemispheroidem est, ut 3. ad 2. Idemque valet de cylindris integræ sphœræ, aut spheroidi circumscriptis.

PROPOSITIO LIII.

Si spatium Hyperbolæ BH, & asymptoto CI interjectum revolvatur circa axem BE, solidum hinc genitum æquabitur cylindro æque alto basim habenti circulum radii BC. Fig. 125

Quoniam rectangulum IHG, nempe differentia quadratorum EI, HE, æquatur quadrato tangentis BC (*Coroll. 1. Prop. 38.*) sive rectæ EK, etiam differentia circulorum à radiis EI, EH; idest armilla circularis genita à recta HI, in rotatione spatii asymptotici BHIC circa axem BE, æquabitur ciculo radii EK in Cylindro ex revolutione rectanguli BCKE descripto; Idque semper evenit, ergo omnes armillæ circulares illius solidi, æquantur omnibus circulis hujus cylindri, & ideò solidum illud huic cylindro æquatur.

COROLL. I. Hinc Conois Hyperbolica ex revolutione sectionis BHE circa axem BE æquatur annulo procedenti ex revolutione trianguli CKI circa eundem axem; hic enim annulus cum cylindro orto ex rectangulo BCKE, adæquat summam ex conoide BHE, & ex solido genito ex asymptotico spatio BHIC; unde cum hoc sit æquale dicto cylindro, etiam conois Hyperbolica dicto Annulo æquatur.

CO-

Fig.126 COROLL. II. Similiter si Asymptoticum spatium ABCD circa secundum axem AF revoluatur, solidum hinc ortum æquabitur cylindro orto ex revolutione rectanguli ABEF circa eundem axem; nam & rectangulum CDH æquatur quadrato AB, sive FE (*prop.* 39.): unde differentia circulorum ex radiis FC, FD, ideſt armilla circularis genita à recta DC in dicto solido, æquatur circulo radii FE in illo cylindro, & hoc semper evenit, unde totum solidum toti cylindro æquè longo æquale erit.

COROLL. III. Annulus autem ex Hyperbolico trilineo BEC, circa AF revoluto, æquabitur cono ex revolutione trianguli ADF circa eundem axem, nam ille annulus cum cylindro, & hic conus, cum solido ex asymptotici spatii revolutione, complet hyperbolicam Cylindroidem, ex revolutione spatii ABCF circa eundem axem AF, genitam.

PROPOSITIO LIV.

Fig.127 *Inscripto rectangulo DEAG inter Hyperbolam æquilateram DC, & eius asymptotos EA, AB, si totum asymptoticum spatium EDCKBA circa AB revoluatur infinities longum, efficietur solidum duplum cylindri a dicto rectangulo circa GA revoluto descripti.*

AGatur quælibet CI asymptoto parallela, secans rectanguli latera in F, I, ejusque diametrum EG in H. Erit CI ad DE, ut EA ad AI (*Coroll.* 3. *prop.*40.), sive ut peripheria radio AE descripta, ad peripheriam radio AI descriptam; Ergo rectangulum ex altitudine CI, & peripheria circulari radii AI, quod est æquale superficiei cylindricæ a recta CI, circa AB revoluta, descriptæ,

ptæ, æquatur rectangulo, ex altitudine DE, & basi peripheria radii AE, quæ esset cylindrica superficies ex revoluta DE circa AB, genita: Quare cylindrica superficies genita à linea CI, ad superficiem cylindricam genitam ab FI est, ut cylindrica superficies genita à DE ad ipsam genitam ab FI, nempe ut peripheria radii EA, ad peripheriam radii AI, nempe ut EA ad AI, sive ut DG, ad GF, vel ut DE, sive FI ad FH; & hoc ubique eveniet; ergo omnes superficies cylindricæ, componentes solidum Hyperbolicum ex revolutione dicti spatii asymptotalis, ad omnes cylindricas superficies constituentes cylindrum ex rectangulo DEAG genitum, sunt, ut omnes lineæ ejusdem rectanguli, ad lineas illis correspondentes in triangulo DEG; cum itaque sint æquales omnes illæ cylindricæ superficies solidi Hyperbolici, necnon æquales lineæ ordinatæ in parallelogrammo rectangulo, erit ipsum solidum Hyperbolicum ad dictum cylindrum, ut rectangulum ad inscriptum triangulum, scilicet in ratione dupla; unde patet propositum.

COROLL. I. Hinc dividendo, solidum Hyperbolicum supra cylindrum a rectangulo GDEA genitum existens, nempe à spatio DCKBG descriptum, erit æquale cylindro illi sibi supposito; & similiter alia portio dicti solidi ex revolutione solius *cCKBb* genita, æquabitur cylindro sibi supposito, per rectangulum *c*LA*b* descripto.

COROLL. II. Et ejusmodi solida ex DCKBG, & ex *c*C KB*b* revolutis genita, erunt ut radii DG. *cb* suarum basium circularium, quippe in hac ratione sunt cylindri illis suppositi, quibus dicta solida æquantur, ut pote in ratione composita altitudinum ED, L*c* (quæ eadem est reciprocè LA ad AE seu rectanguli LAE ad AE quadratum) & AE quadrati ad quadratum AL, adeoque sunt, ut

LAE

LAE ad AL quadratum, scilicet ut AE ad AL, seu ut DG ad *c b*.

Fig. 128. COROLL. III. Ideò si divisa fuerit AE in aliquot partes æquales AI, IL, LH, HE &c. ductis asymptoto parallelis IC, L*c*, HM, ED, atque ordinatis ad asymptoton CB, *c b*, MN, DG, ex revolutione hujus spatii asymptotici circa AB, erunt partes à portionibus, DMNG, M*c b*N, *c* CB*b*, & ultima infinitè longa CKB descriptæ, invicem æquales; cum enim sint illa integra solida, ut radii basium, eorum differentiæ sunt, ut differentiæ talium radiorum, quæ hic sunt æquales.

COROLL. IV. Quod si totum spatium ex integra Hyperbola, & utroque infinito asymptoto contentum revoluatur circa unam asymptoton, nempe AOQPDCK circa AB, erit hoc magnitudinis infinitæ, quippe in ipsa infinita asymptoto AOQ infinitæ partes æquales ipsis AI, IL &c. designari possunt, quibus totidem correspondebunt infinitæ portiones hujus solidi, invicem æquales.

FINIS.